Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Maths) I Semester Examination - December - 2018

MSMM101CCT : Real Analysis - I

پرچہ : حقیقی تجزیہ - I

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/ مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو (500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال نمبر 1 :

(i) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(2-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{2}\right) =$ .... ہے۔

(a) ϕ (b) { 0 } (c) (0, 2) (d) ان میں سے کوئی نہیں

(ii) Countable 'Q' سٹ ہے (صحیح/غلط)

(iii) Decreasing Sequence کی تعریف کرو۔ ایک مثال دو۔

(iv) $\left\langle S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} \right\rangle$ .... ہے۔

(a) Convergent (b) Divergent (c) Oscillatory (d) ان میں سے کوئی نہیں

(v) $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) (x \neq 0)$ اور $f(0) = 0$, $x = 0$ پر

(a) Continuous ہے (b) Differentiable ہے (c) دونوں (d) ان میں سے کوئی نہیں

(vi) $L(P, f, \alpha)$ اور $U(P, f, \alpha)$ کی تعریف کرو۔

(vii) $f(x) = x^2$, $[0,a]$ پر Integrable ہے۔ (صحیح/غلط)

(viii) $f_n(x) = x^n \ \forall x \in S = [-a, a], 0 < a < 1$ ہو تب $f_n(x) \to f(x) = 0$ ہوگا (صحیح/غلط)

(ix) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \; \forall x \in \mathbb{R}$ ' $\mathbb{R}$ پر .... ہے۔

(a) Convergent ہے (b) Uniform Convergent ہے (c) Divergent ہے (d) ان میں سے کوئی نہیں

(x) Uniform Convergence کی تعریف کرو۔

حصہ دوم

(2) ثابت کرو کہ $S_n = \frac{3n-1}{n+2}$ Increases اور Bounded ہے۔

(3) (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ اور (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n+3^n}\right)$ کے Convergence کی جانچ کرو۔

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n}}{2^n}\right)$ کے Convergence کی جانچ کرو۔

(5) Compact Set کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ ہر Compact Set ' Closed Set ہوگا۔

(6) ثابت کرو کہ Connected Set کی Continuous Image ' Connected ہے۔

(7) $\underline{\int_a^b} fd\alpha$ اور $\overline{\int_a^b} fd\alpha$ کی تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ $\underline{\int_a^b} fd\alpha \le \overline{\int_a^b} fd\alpha$

(8) اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ E پر ایک Sequence of Functions اس طرح ہے کہ $\forall x \in E, n = 1,2,3.....\ |f_n(x)| \le M_n$

تب $\sum f_n$ Converges ہوگا اگر $\sum M_n$ Convergent ہو۔

(9) 'Continuous Function' تکمیل پذیر Integrable ہوگا ثابت کرو۔

حصہ سوم

(10) Monotonic اور Bounded Sequence کی تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ ہر Monotonic Sequence ' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Convergent ہے $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ Bounded ہے۔

(11) اگر X اور Y دو Metric Spaces ہیں تب $f : X \to Y$ ' X پر Continuous ہوگا $\Leftrightarrow f^{-1}(V)$ ' X میں Open ہے Y کے

ہر Open Set 'V' کے لیے۔

(12) Riemann Stieltjes Integral کی تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ $f \in R(\alpha)$ ہوگا $\Leftrightarrow$ ہر $\in > 0$ کے لیے ایک "Partition" P

اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \in$ ہے۔

(13) ثابت کرو کہ ہر 'K-Cell' Compact ہوگا۔

(14) اگر α ' $[a,b]$ پر ایک Monotonically Increasing Function ہے ' $f_n \in R(\alpha)$ ' $\forall n = 1,2,3.....$ اگر [a,b] پر

$f_n \to f$ uniformly ہو تب ثابت کرو کہ $f \in R(\alpha)$ ہوگا اور $\int_a^b fd\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n d\alpha$ ہے۔

☆☆☆