Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Maths) I Semester Examination - December - 2018

MSMM102CCT : Linear Algebra

پرچہ :- خطی الجبرا

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. **حصہ اول** میں **10** لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. **حصہ دوم** میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو **(200)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **6** نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. **حصہ سوم** میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو **(500)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **10** نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال نمبر : 1

(i) اگر A* اور B*، A اور B کے Transpose Conjugate ہوں اور (i) (A*)*=A (ii) (A+B)*=A*+B* تب

(a) صرف (i) صحیح ہے (b) صرف (ii) صحیح ہے (c) (i) اور (ii) صحیح ہیں (d) ان میں سے کوئی نہیں

(ii) اگر 'T' Finite Dimensional Vector Space V پر ایک خطی عامل ہے اور c اس کی Characteristic Value ہو تب

(a) $\det(T-cI)\neq 0$ (b) $\det(T-cI)=0$ (c) $\det(T-cI)>0$ (d) $\det(T-cI)<0$

(iii) ماترس $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\2&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&5&5\end{pmatrix}$ کے Linearly Independent Vectors .... ہیں

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(iv) اگر U اور V، $\mathbb{R}^4$ کے تحت فضائیں (Subspaces) اس طرح ہیں کہ U=span {1,2,3,4), (5,7,2,1), (3,1,4-3)} V=span {(2,1,2,3), (3,0,1,2), (1,1,5,3)} تب $U\cap V$ کا Dimension .... ہوگا۔

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(v) اگر U اور V n dimension اور m کے Vector Spaces ہیں تب H(U,V) کا Dimension .... ہوگا۔

(a) 0 (b) n.m (c) n+m (d) ان میں سے کوئی نہیں

(vi) اگر A ایک Square Matrix اس طرح ہے کہ $A^5=0$ تب

$A^4=I$ (a) $A^4=A$ (b) $A^4=0$ (c) $A^4=-I$ (d)

(vii) اگر 'Vectors' $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots\ldots \vec{v}_n$ Linearly Independent ہوں تب.......................ہوگا۔

(viii) Linear Transformation کے Rank کی تعریف کرو۔

(ix) Sylvester's Law of Nullity کو بیان کرو۔

(x) Dual Space کی تعریف کرو۔

حصہ دوم

(2) Vector Space کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ $\mathbb{R}^4$ ایک Vector Space ہے۔

(3) ذیل میں کون سا Linear Transformation ہے۔

$$T(x_1, x_2) = (1 + x_1, x_2)$$

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 0)$$

(4) اگر $v_1, v_2 \in V$ ہیں اور $v_1 \equiv v_2 (\mathrm{mod}\, W)$ $\Leftrightarrow$ $v_1 - v_2 \in W$ (جہاں V, W کا Subspace ہے)

تب ثابت کرو کہ Relation '≡' Congruent Modulo W ایک Equivalence Relation ہے۔

(5) اگر W, V میدان F پر دو Vector Spaces ہیں تب ثابت کرو کہ V اور W Isomorphic ہوں گے $\Leftrightarrow$

$\dim(V) = \dim(W)$ ۔

(6) ماترس P (Matrix) معلوم کرو جو $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ کو Diagonal Form میں تبدیل کرتا ہے۔

(7) Hermitian Matrix کی تعریف کرو۔

(i) بتلاؤ کہ Hermitian Matrices کے Principal Diagonal کے عناصر (Elements) حقیقی اعداد (Real Numbers) ہیں۔

(ii) اگر A اور B دو Hermitian Matrices مساوی رتبہ (Equal Oder) کے ہیں تب بتلاؤ کہ AB Hermintian ہے $\Leftrightarrow AB = BA$ ۔

(8) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ کے Eigen Values اور Eigen Vectors معلوم کرو۔

(9) Inner Product Space کی تعریف کرو۔ $\mathbb{R}^n$ کا Standard Inner Product ایک Inner Product ہوگا اس کی تصدیق کرو

حصہ سوم

(10) ماترس (Matrix) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ کا Characteristic Equation معلوم کرو۔

Cayley-Hamilton's کے نظریہ کی تصدیق کرو اور $A^8 - 5A^7 + 7A^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I$ کو اخذ کرو۔

(11) Sylvester's Law of Nullity کو ثابت کرو۔

(12) Complex Matrix
$$A=\begin{pmatrix}2&0&0&0&0&0\\1&2&0&0&0&0\\-1&0&2&0&0&0\\0&1&0&2&0&0\\1&1&1&1&2&0\\0&0&0&0&1&-1\end{pmatrix}$$
کا Jordan Form معلوم کرو۔

(13) اگر میدان (Field) F پر V ایک Vector Space ہے اور $U\subset V$ تب بتلاؤ کہ ذیل کے بیانات صحیح ہیں۔

(i) V, U کی Basis ہے۔

(ii) ہر $v\in V$ کو U کے عناصر (Elements) کے Finite Linear Combination میں یکتا (Unique) طور پر لکھ سکتیں ہیں۔

(iii) اگر U ‘ V کا Minimal Spanning Set ہے جو $Z\subset U$ $Span(Z)=V$ ہو تب $Z=U$ ہوگا

(14) فرض کرو کہ $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ایک Linear Transformation اس طرح ہے کہ $Tx=x\ \forall\ x\in\mathbb{R}^3$ اور
$B_1=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ اور $B_2=\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ $\mathbb{R}^3$ کے دو Ordered Bases ہیں
تب T کی ماترس A معلوم کرو۔

☆☆☆