Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. Maths (MSMM102CCT) I Semester Examination - December - 2017

Paper : Linear Algebra

پرچہ : لائنیر الجبرا

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. **حصہ اول** میں **10** لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. **حصہ دوم** میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو **(200)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **6** نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. **حصہ سوم** میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو **(500)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **10** نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال نمبر : 1

(i) اگر A ایک Unitary Matrix ہو تو A کے Eigen Values ہیں۔

(a) 1, -1 (b) 1, -1 (c) i, -i (d) -1, i

(ii) 2x2- Matrices کے subspace کا Dimension جو مارٹرس (Matricies) $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$ Spanned ہے..................ہوگا۔

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(iii) U اور V ، R^4 کے Subspaces اس طرح سے ہیں کہ

$$U = \text{Span}\,[(1, 2, 3, 4), (5, 7, 2, 1), (3, 1, 4, -3)]$$

$$V = \text{Span}\,[(2, 1, 2, 3), (3, 0, 1, 2), (1, 1, 5, 3)]$$

تب L (U,V) کا Dimension ہے۔

(a) 3 (b) 6 (c) 9 (d) ان میں کوئی بھی نہیں

(iv) اگر A ایک 4x4 Matrix ہے اور $A^5=0$ ہو تب __________ ہوگا۔

(a) $A^4=I$ (b) $A^4=A$ (c) $A^4=0$ (d) $A^4=-I$

P.T.O

(v) اگر A ایک Square Matrix اس طرح ہے کہ det A = trace A اور eigen values کا sum = ان کے حاصل ضرب کے مساوی ہو تب A ....ہوگا۔

(a) Upper Triangular Matrix (b) Diagonal Matrix

(c) Idempotent Matrix (d) Nilpotent Matrix

(vi) Inner Product Space میں Norm کی تعریف ذیل سے کی جاسکتی ہے۔

(a) $\|V\| = <v,v>$ (b) $\|V\| = <u,v>$ (c) $\|V\| = <v,v>^2$ (d) کسی سے بھی نہیں

(vii)

(viii) فرض کرو کہ $A \in M_{3X3}(R)$ ، تب (t^2+1) Polynomial ہے۔

(a) A کا Minimal Polynomial (b) A کا Characterstics Polynomial

(c) a اور b دونوں صحیح ہیں (d) کوئی بھی صحیح نہیں ہے۔

(ix) میٹرکس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ کے Eigen values ہیں۔

(a) i, -i, 1, 1 (b) 1, 3, -1, 5 (c) 1, 2, 5, 6 (d) کوئی بھی نہیں

(x) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ہو تو A^3 کی Eigen values ہیں۔

(a) 2, 5, 6 (b) 8, 27, -1 (c) 2, 3, -1 (d) کوئی بھی نہیں

حصہ دوم

(2) بتلاؤ کہ اگر S' Vector Space V کا غیر خالی (Non Empty) سب سیٹ ہے تب S کا Linear span L[S] ، V کا subspace ہے۔

(3) ذیل میں سے کون سے فنکشنس $T: R^2 \to R^2$ Linear Transformations ہیں۔

(i) $T(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2)$ (ii) $T(x_1, x_2) = (Sinx_1, x_2)$

(4) اگر V، F پر ایک Finite Dimentional ویکٹر اسپیس (Space) ہے تو V کے dual V* کی تعریف کرو اور بتلاؤ کہ dim V = dim V*۔

(5) تعریف کرو۔

(i) ہم مارفیت Homomorphism (ii) یک مارفیت Isomorphism (iii) کرنل Kernel

ثابت کرو کہ Homorphism کا کرنل (Kernel) ایک Subspace ہے۔

(6) فرض کرو کہ U اور V Field 'F' پر Vector Spaces ہیں تب Addition اور Scalar Multiplication کی تعریف کرو جس سے Hom (U,V) F پر Vector Space بن جائے۔

(7) مان لو $a_1 = (1, 0, 1)$ ، $a_2 = (0, 1, -2)$ اور $a_3 = (-1, -1, 0)$ R^3 کے ویکٹرس ہیں۔ اگر f R^3 پر ایک Linear Functional اس طرح سے ہے کہ $f(a_1) = 1$ ، $f(a_2) = -1$ اور $f(a_3) = 3$ تب $a = (x, y, z)$ کے لیے f(a) معلوم کرو۔

(8) Inner Product کی تعریف کرو۔ Inner Product Space کے دو مثال پیش کیجیے۔

(9) فرض کرو کہ V اور Z فیلڈ F پر Vector Spaces ہیں۔ فرض کرو کہ T ایک Linear Transformation ہے V onto Z،
اگر W، T کا Null Space ہے تب بتلاؤ کہ V/W اور Z Isomorphic ہیں۔

حصہ سوم

(10) Nullity کے Sylvester Law کو بیان اور قائم (establish) کریں۔

(11) اگر f اور g، F پر non zero polynomials ہیں تب بتلاؤ کہ (i) fg ایک (non zero) Polynomial ہے۔
(ii) deg (fg) = deg (f) + deg (g) (iii) اگر f اور g Monic Polynomials ہیں تو ثابت کرو کہ fg بھی
Monic Polynomial ہوگا۔

(12) فرض کرو کہ A ایک n x n ' Matrix ہے۔ اگر A کے Linearly Independent Vectors ہیں تو بتلاؤ A
Diagonalizable ہوگا۔

(13) Cayley - Hamilton Theorem کو بیان اور ثابت کرو۔

(14) میٹرکس (Matrix) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ کے Eigen Values اور EigenVectors معلوم کرو۔

☆☆☆