Maulana Azad National Urdu University

M.Sc : Mathematics II Semester Examination - May - 2019

Paper : MSMM203CCT : Complex Analysis

Total Marks : 70 **Time : 3 hours**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. **حصہ اول** میں **10** لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. **حصہ دوم** میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو **(200)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **6** نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. **حصہ سوم** میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو **(500)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **10** نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال: 1

i۔ Neighbourhood کی تعریف کرو۔

ii۔ Analytic function کی تعریف کرو۔

iii۔ اگر P اور Q دائرہ C (Circle) کے inverse points ہیں جس کا r radius ہو تب ----------

(a) $CP.CQ=r^2$ (b) $CP.CQ=r$ (c) $CP.CQ=0$ (d) $CP.CQ=1$

iv۔ ان میں سے کونسا غلط ہے

(a) $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ (b) $|z_1+z_2|\ge|z_1|+|z_2|$

(c) $|z_1-z_2|\le|z_1|+|z_2|$ (d) $|z_1-z_2|\ge|z_1|-|z_2|$

v۔ Liouville Theorem کو بیان کرو۔

vi۔ $f(z)=\dfrac{z+2}{(z-1)(z^2+1)}$ کے پولس (poles) ----------- ہیں۔

(a) $z=1,\pm i$ (b) $z=-1,\pm i$ (c) $z=1,\pm 2i$ (d) $z=-1,\pm 2i$

vii۔ z=0، $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ کے لیئے ---------- ہے

(a) Essential singularity (b) Branch point (c) Simple pole (d) Removable singularity

viii ایسے نقطہ (point) جہاں $f(z)=3z+z^2$ conformal نہ ہو ------ ہیں

(a) $z=\frac{1}{2}$ (b) $z=-\frac{1}{2}$ (c) $z=\frac{3}{2}$ (d) $z=-\frac{3}{2}$

ix۔ تفاعل (function) $w=\beta z$ ---------- transformation دیتا ہے۔

(a) Magnification (b) Rotation (c) Magnification & Rotation (d) ان میں کوئی بھی نہیں

x۔ Transformation $w=\bar{z}$ ---------- ہے۔ (Conformal/Isogonal)

حصہ دوم

2۔ کوشی ریمان مساواتوں (Cauchy-Riemann Equations) کو پولر شکل (polar form) میں حاصل کرو۔

3۔ بتلاؤ کہ $f(z)=u+iv$ جہاں $f(z)=\frac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{x^2+y^2}$ ، $(z\neq 0)$ ، $f(0)=0$ continuous ہے اور کوشی ریمان مساواتوں (Cauchy-Riemann Equations) کو Origin پر پورا کرتا ہے، پھر بھی $f'(0)$ وجود (exist) نہیں رکھتا ہے۔

4۔ $\int_C (z^2+3z+2)dz$ کو اخذ (Evaluate) کرو ، جہاں C نقاط $(0,0)$ اور $(\pi a, 2a)$ کے درمیان cycloid $x=a(\theta+\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)$ کا arc ہے ۔

5۔ Cauchy Integral فرمولے کے استعمال سے $\int_{|z|=3}\frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz$ کو اخذ (Evaluate) کرو۔

6۔ تفاعل (function) $f(z)=\frac{z^2-4}{(z+1)(z+4)}$ کا رتجنس (regions) (i) $1<|z|<4$ اور (ii) $|z|>4$ پر پھیلاو (expansions) معلوم کرو۔

7۔ تفاعل (function) $f(z)=\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ کے finite plane میں سبھی پولس (poles) پر ریسیڈیو (Residue) معلوم کرو۔

8۔ Bilinear transformation تلاش کریں جو نقطہ $z=\infty,i,0$ کو نقطہ $w=0,i,\infty$ میں نقش کرتا ہے۔

9۔ $w=f(z)$ کے conformal mapping ہونے کی sufficient condition کو بیان اور ثابت کرو۔

حصہ سوم

10۔ (i) اگر $u = e^x \cos y$ ہو تب بتلاؤ کہ u harmonic ہے اور اسکا harmonic conjugate معلوکرو۔

(ii) اگر $f(z) = u + iv$ ایک analytic function ہے اور $u + v = \dfrac{2\sin x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x}$ تب $f(z)$ معلوکرو۔

11۔ Cauchy Integral Theorem کو بیان اور ثابت کرو۔

12۔ Laurent's Theorem کو بیان اور ثابت کرو۔

13۔ $\int_0^{2\pi} \dfrac{d\theta}{1 + a^2 - 2a\cos\theta}$ ، $0 < a < 1$ کو اخذ (Evaluate) کرو

14۔ (i) $w = \dfrac{3z-4}{z-1}$ کے fixed points اور Normal form معلوم کرو۔

(ii) Transformation $w = \dfrac{1}{z}$ میں خطوط (lines) $x = 1$ اور $y = 1$ کے images معلوم کرو۔

☆ ☆ ☆