Maulana Azad National Urdu University

M.Sc : Mathematics II Semester Examination - May - 2019

Paper : MSMM213CCT : Real Analysis : II

پرچہ : حقیقی تجزیہ

Total Marks : 70 **Time : 3 hours**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. **حصہ اول** میں **10** لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. **حصہ دوم** میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو **(200)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **6** نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. **حصہ سوم** میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو **(500)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **10** نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال: 1

i۔ مثال دو (a) $\mathbb{R}$ میں ایک سٹ جو مثبت پیمائش (Positive Measure) کا ہو۔
(b) صفر پیمائش (Zero Measure) والا لامتناہی شمار پذیر (Countably Infinite) سٹ۔

ii- 'Zero Measure' والے Uncountable Set کی مثال دو۔

iii۔ [0,1] پر ایسے تفاعل (Function) کی مثال دو جو Measurable نہ ہو۔

iv۔ $\mathbb{R}$ پر 'Simple Function' ϕ کی تعریف کرواور اس کا Lebesgue Integral دو۔

v۔ [0,1] پر ایسے Lebesgue Integrable Function کی مثال دو جو [0,1] پر کہیں بھی تسلسل نہ ہو۔

vi۔ (a,b) پر 'Monotone Function f' کے Differentiability کے Lebesgue کے نظریہ کو بیان کرو اور اس کی Continunity بھی بیان کرو۔

vii۔ ہر Monotone Function [a,b] پر Bounded Variation والا ہوگا۔ (صحیح/غلط)

viii۔ [a,b] پر Bounded Variation والا ہر Bounded ʻFunction ہے۔ (صحیح/غلط)

xi۔ Egoroff کے نظریہ کو بیان کرو۔

x۔ Lebesgue Space کے لیے Riesz Representation کے نظریہ کو بیان کرو۔

حصہ دوم

2۔ (a) بتلاؤ کہ دو 'Measureable Sets' کا اتحاد (Union) Measurable ہوگا (i) Finite (ii) Countable Union کے لیے بیان کرو۔

(b) بتلاؤ کہ Cantor's Ternary سٹ 'C' کا Lebesgne measure صفر ہے۔

3۔ (a) [0,1] پر 'Dirichlet Function f' کی تعریف کرو۔ f کو [0,1] پر Step Functions کے تواتر (Sequence) $\langle f_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ کے Pointwise Limit میں ظاہر کرو۔ (i) $(R)\int_0^1 f_n$ (ii) $(R)\int_0^1 f$ (iii) $(L)\int_{[0,1]} f$ معلوم کرو۔

(b) [0,1] میں 'Dirichlet Function' f کے Continuity کے نقاط معلوم کرو۔

4۔ Lebegue Bounded Convergence کے نظریہ کو بیان کرو۔ اس کے استعمال سے بتلاؤ کہ [0,1] پر Sequence $\left\langle f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2} \right\rangle$ کے لیے $n \to \infty$ limit اور تکمل (Integral) بدل نہیں سکتے۔

5۔ Lebesgue Monotone Convergence کے نظریہ کو بیان کرو۔ اس کے استعمال سے $'f'\ \left(f(x=0\ (x=0)\ f(x) = \dfrac{1}{x1/3} 0 < x \le 1 \right)$ کو *[0,1]* پر Bounded Function کی تواتر *{fn(x)}* کی Pointwise Limit سمجھ کر $(L)\int_0^1 f$ معلوم کرو۔

6۔ (a) [a,b] پر 'Lipschitz Function' f کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ [a,b] پر ایسا f Bounded Variation والا Function ہے۔ کیا f Absolute Continuous ہے؟

(b) بتلاؤ کہ [a,b] پر Absolutely Continuus Function ‘ Bounded Variation والا ہے۔ اس کے f کے derivative کے بارے میں بتلاؤ

7۔ (a) [a,b] پر 'function' f کے Indefinite Integral 'F' کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ [a,b] پر Bounded Variation والا ہر 'function' f [a,b] پر Indefinite Integral ہے۔

(b) Convex Function کی تعریف کرو۔ دو مثالیں دو۔ اس کے Derivatives ϕ' اور ϕ'' کے بارے میں [a,b] پر کیا بتا سکتے ہیں؟

8۔ (a) $1 \le P \le \infty$ کے لیے $L^P[0,1]$ کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ وہ Linear Spaces ہیں اس کے Norms دو۔

(b) $L^P[0,1]$ میں (i) Holders Inequality (ii) Minkowskis Unequality (iii) Cauchy Schwartz Inequality اور (iv) Riesz-Fisher نظریہ کو بیان کرو۔

9۔ (a) سارے Lebesgue Spaces ‘ $L^P[0,1]$ کو $L^1[0,1]$ کے خطی تحت فضائیں Linear sub spaces کے ascending chain میں لکھو۔ $L^1[0,1]$ میں $L^P[0,1]$ اور اس کا Dual $L^q[0,1]$ کی نسبت بتلاؤ۔

(b) (X, B, μ) General Measure space کی تعریف کرو۔ دو مثالیں دو۔ Finite Measure Space ۔ σ کیا ہے؟ ایک مثال دو۔

حصہ سوم

10۔ (a) فرض کرو کہ 'C' [0,1] کے حقیقی اعداد x کا ایسا سٹ ہے کہ $x=0.x_1, x_2 \ldots\ldots x_n \ldots\ldots$ جہاں کوئی بھی x_n 3 اور 5 نہیں ہے بتلاؤ کہ C کا Lebesgne Measure صفر ہوگا۔

(b) بتلاؤ کہ [0,1] پر ایک تفاعل (Function) جس کی تعریف $f(x) = 3 \ (x = 0)$ ہوایک

$= 1/2 \ (0 < x < 1)$

$= 5 \ (x=1)$

Measureable Function ہے۔

11۔ Fatous Lemma کو بیان کرو۔فرض کرو کہ $\{f_n(x)\}_2^\infty$ [0,1] پر ایسی تواتر (Sequence) ہے کہ

$$f_n(x) = 0 \quad x > \frac{2}{n}$$

$$= n^2 x \ \forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$$

$$= n \quad x = \frac{1}{n}$$

$$= n^2\left(\frac{2}{n} - x\right) \forall x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$$

تب $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \forall x \in [0,1], n = 1,2,3,.....$ معلوم کرواور بتلاؤ کہ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n \neq \int_0^1 f$ ۔ اس مثال کے لیے

Fatous Lemma کی جانچ کرو

12۔ Lebesgue Dominated Convergence کے نظریہ کو بیان کرو۔اس کے استعمال سے $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n$ اخذ کرو جب کہ

$$f_n(x) = \frac{n^2 x^{3/2}}{1 + n^4 x^4} (x \in [0,1], n = 1,2,3...)$$

13۔ (a) بتلاؤ کہ [a,b] پر Bounded Variation والے Function کو دو Monotone Functions کے فرق سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

(b) $C[[a,b],\mathbb{R}]$ اور BV [a,b] کی نسبت کو ایک مثال کے ذریعہ بتلاؤ۔

14۔ (a) $L^P[0,1]$ میں Minkowskis Inequality کو بیان اور ثابت کرو۔

(b) $L^P - Space$ کے Completeness کے بارے میں لکھو $L^P[0,1]$ کب Complete ہوگا۔

$L^P - Space$ کے Completeness کے Necessary and Sufficient condition کو بتلاؤ۔

Complete Normed Linear Spaces کے تین مثالیں دو۔

☆☆☆