Maulana Azad National Urdu University

M.Sc : Mathematics II Semester Examination - May - 2018

Paper : MSMM201CCT : Algebra : الجبرا

Total Marks : 70 **Time : 3 hours**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. **حصہ اول** میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. **حصہ دوم** میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو **(200)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **6** نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. **حصہ سوم** میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو **(500)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **10** نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال: 1

(i) Prime Order کا ہر گروپ 'Cyclic' ہے۔ (صحیح/ غلط)

(ii) Upto Isomorphism کے کتنے Cylclic Groups ہیں بتلاؤ۔

(iii) Uptoisomorphism کے 'Order 4' والے کتنے گروپ ہیں اوران کی قسمیں بتلائیے۔

(iv) 'Finite Abelian Group' کے Cauchys Theorem کو بیان کرو اور ایک مثال دو۔

(v) Order 49 والا گروپ Cyclic ہے۔ (صحیح/ غلط)

(vi) Simple Group کی تعریف کرو۔ایک مثال دو۔

(vii) Solvable Symmetric Group S_5 ہے۔ (صحیح/ غلط)

(viii) $\mathbb{Z}$ کے 'Congruence Classes Modulo 31' کے لیے $(\mathbb{Z}_{31},+,.)$ کا algebraic sructure بتلاؤ اوراس کی Characteristic معلوم کرو۔

(ix) اکائی کے ساتھ کی Commutative اور Non-commutative رنگس (Rings) کی مثالیں دو۔

(x) Euclidean Domain کی دو مثالوں کے ساتھ تعریف کرو۔

حصہ دوم

2۔ (a) گروپ G (Group) کے Centre 'Z' کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ 'Z' G کا Normal Subgroup ہے اور وہ Abelian Sub Group ہوگا اگر Z=G ہو۔

(b) اگر N_1 اور N_2 گروپ G کے Normal Subgroups ہیں تب بتلاؤ کہ $N_1 \cap N_2$ ‘G کا Normal Sub Group ہے۔

3۔ n-symbols کے Even اور 'odd' Permutations کی تعریف کرو۔ بتلاؤ Even Permutation کا سٹ S_n, A_n کا Normal Subgroup ہے جس کا Index '2' ہے۔

(i) 'n' کے کون سے قیمتوں کے لیے 'An' Non-abelian ہے۔

(ii) n کے کون سے قیمتوں کے لیے 'An' Simple ہے۔

4۔ Finite Group کے Class Equation کو بیان کرو۔ اس کے استعمال سے بتلاؤ کہ (P-prime) Order P^n والا G کا ایک Non-trivial Centre ہوگا۔ نیز بتلاؤ کہ Order P^2 والا گروپ Abelian ہوگا۔

5۔ بتلاؤ کہ ہر 'Finite Integral Domain' Field ہے اس کے استعمال سے بتلاؤ کہ (p-prime) $(\mathbb{Z}_p,+,.)$ ایک Field ہے۔ Infinite Intetral Domain کی ایک مثال دو جو Field نہیں ہے۔

6۔ (a) رنگ R کے Centre Z (R) کی تعریف کرو بتلاؤ وہ R کا Subring ہے۔

(b) رنگ Homomorphism $\phi: R \to R^1$ کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ (i) $\ker \phi$ R کا Ideal ہے اور (ii) $\mathrm{Im}\,age(\phi)$ R^1 کی Subring ہے۔

7۔ (a) تعریف کرو: (i) Euclidean Domain (ii) PID (iii) UFD ایک مثال دو۔ بتلاؤ کہ ہر Euclidean Domain ایک PID ہے۔

8۔ رنگ کے Principal Ideal کی تعریف کرو۔ $\mathbb{Z}$ میں ایک مثال دو بتلاؤ کہ رنگ R [x] کا ہر Ideal ’ Principal Ideal ہوگا اگر اس کے تمام 'Polynomials' ‘ Real Coefficient کے ہوں۔

9۔ Finitely Generated Abelian Group کے Structure theorem کو بیان کرو اس کے Invariants دو۔ اس کے استعمال سے Order 180 والے Upto Isomorphic کے تمام Non-Isomorphimc Abelian Groups معلوم کرو۔

حصہ سوم

10۔ گروپ (Group) کے پہلے Isomorphism Theorem کو بیان کرو۔ اگر $G=(\mathbb{R},+)$ ، $G^1=(\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{o\},\times)$ دو گروپ ہیں اور $\phi:G\to G'$ کی تعریف $\phi(x)=e^{2\Pi ix}$ ہے تب (i) $\mathrm{Im}\,age(\phi)$ (ii) $Kernel(\phi)$ معلوم کرو۔

(iii) ان گروپس کے لیے پہلے Isomorphism Theorem کا استعمال کرو۔

11۔ (a) 'Symmetries of a Square' کے گروپ D_8 کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ 'D_8' Order 8 والا Non-abelian گروپ ہے جس کا Order 4 والا Normal Subgroup ہوگا۔

(b) دو گروپس کے Direct Product $G_1\, x\, G_2$ کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ $\mathbb{Z}_m x\mathbb{Z}_n$ Cyclic ہے۔ $\Leftrightarrow$ (m,n) =1۔

$\mathbb{Z}_2 x\mathbb{Z}_3$ اور $\mathbb{Z}_6 x\mathbb{Z}_9$ Cyclic ہے یا Abelian ؟

12۔ Sylows کے تین نظریات کو بیان کرو۔ ان کے استعمال سے بتلاؤ کہ Order 15 والا گروپ Simple نہیں ہے لیکن وہ Cyclic ہے۔

13۔ (a) ثابت کرو کہ اکائی (Unit) کے ساتھ والا 'R' Commutative Ring کا Maximal 'M' Ideal ہوگا

$\Leftrightarrow$ R/M ایک Field ہے۔

(b) اس کے استعمال سے یا بغیر بتلاؤ کہ رنگ $C([0,1],\mathbb{R})$ ... کا سٹ $M=\left\{f\in C/f\left(\frac{1}{3}\right)=0\right\}$

Maximal Ideal ہے۔

14۔ (a) بتلاؤ کہ ایک Euclidean Domain D میں ہر دو non-zero a,b, کا ایک Unique g.c.d. D میں ہوگا۔

(b) Eisentein Criteria کو بیان کرو۔ اس کے استعمال سے بتلاؤ 'Q' پر

$(i)\ f(x)=7x^5-9x^4+3x^2+12x-15$

$(ii)\ f(x)=x^4+x^3+x^2+1\in\mathbb{Z}[x]$ Irreducible ہے یا نہیں؟

☆ ☆ ☆