Maulana Azad National Urdu University

M.Sc : Mathematics II Semester Examination - May - 2018

Paper : MSMM202CCT : Topology

Total Marks : 70 **Time : 3 hours**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. **حصہ اول** میں **10** لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات / خالی جگہ پُر کرنا / مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. **حصہ دوم** میں آٹھ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو **(200)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **6** نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. **حصہ سوم** میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو **(500)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **10** نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال: 1

(i) اگر X ایک غیر خالی سٹ (Non-empty Set) ہے اور اگر $T = \{\phi, X\}$ ہو تب (X, T)

(a) ایک Topological Space نہیں ہے (b) Indiscrete Topological Space ہے

(c) Discrete Topological Space ہے (d) ان میں سے کوئی نہیں

(ii) $\mathbb{R}$ کا تحت سٹ (Subset) $[a, +\infty)$

(a) Open Set ہے (b) Closed Set ہے

(c) دونوں (a) اور (b) (d) ان میں سے کوئی نہیں

(iii) ذیل کا کونسا بیان صحیح ہے۔

(a) ہر Completely regular space ‘ Hausdroff Space ہے۔

(b) ہر 'Hausdroff Space' 'Completely Regular, ' ہے۔

(c) (a) اور (b) دونوں (d) (a) اور (b) دونوں نہیں

(iv) اگر $\mathbb{R}^2$ کا 'X' Subspace اس طرح ہے کہ $X = A \cup B$ جہاں $A = \{(x, y) / x = 0 \ and \ -1 \le y \le 1\}$ اور $B = \{x, y) / 0 < x \le 1 \ y = \sin(1/x)\}$ تب X

(a) ایک Compact Space ہے (b) ایک Connected Space ہے

(c) ایک Locally Connected Space ہے (d) ان میں سے کوئی نہیں

(v) اگر X ایک 'Discrete Toplogical Space' ہے تب ذیل کا کون سا بیان صحیح ہے۔

(a) X کا کوئی Component نہیں ہیں (b) X کا ہر Component Point ہے

(c) X کے Finite Components ہیں (d) X کے Components ‘Countable ہیں۔

P.T.O

(vi) اگر $\{A_i\}$ Topological Space X کے Connected Subspaces ہیں تب $\underset{i}{U} A_i$ Connected ہوگا۔ اگر

(a) $\underset{i}{U} A_i = \phi$ (b) $\underset{i}{U} A_i \neq \phi$

(c) $\bigcap_i A_i \neq \phi$ (d) $\bigcap_i A_i = \phi$

(vii) $\mathbb{R}^\infty$ کا Unit Sphere .... ہے۔

(a) Bounded ہے اور Totally Bounded نہیں ہے (b) Totally Bounded ہے اور Bounded نہیں ہے

(c) Bounded اور Totally Bounded دونوں ہیں (d) Bounded اور Totally Bounded نہیں ہیں۔

(viii) ایک Totally Disconnected Space .... ہوگا۔

(ix) 'Sequentially Compact' فضا (Space) کی تعریف .... ہے۔

(x) Completely Regular Space .... ہے۔

حصہ دوم

2۔ اگر غیر خالی سیٹ X (Non-Empty Set) کے T_1 اور T_2 دونوں Topologies ہیں تب ثابت کرو کہ $T_1 \cap T_2$ بھی X کی Topology ہے۔

3۔ غیر خالی سیٹ X (Non-Empty Set) پر Standard Topology اور Lower Limit Topology کی تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ Lower Limit Topology، Standard Topology سے Finer ہوگی۔

4۔ ثابت کرو کہ Compact Spaces کے non-empty class کا حاصل ضرب (Product) Compact ہوگا۔

5۔ ثابت کرو کہ ایک 'Metric Space' Sequentially Compact ہوگی $\Leftrightarrow$ اس میں Bolzano-Weirstrass Property ہو۔

6- ثابت کرو کہ $\mathbb{R}^n$ اور $\mathbb{C}^n$ Connected ہیں۔

7۔ Countability کے دو Axioms کو بیان کرو۔ ثابت کرو کہ دو Second Countable Spaces کا حاصل ضرب (Product) Second Countable ہے۔

8۔ ایک Topological Space (X,T) میں ثابت کرو کہ

(i) $\overline{\phi} = \phi$ (ii) $A \subseteq \overline{A}$ (iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

9۔ ثابت کرو کہ Connected Space کی 'Continuous Image' Connected ہے۔

حصہ سوم

10۔ Ascoli's Theorem کو بیان اور ثابت کرو۔

11 ۔ Tietze Extension کے نظریہ کو بیان اور ثابت کرو۔

12۔ Hausdorff Space کی تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ ہر Compact Hausdorff Space نارمل (Normal) ہے۔

13۔ Connected Space کی تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ خط حقیقی (Real Line) $\mathbb{R}$ کی تحت فضا (Sub space) Connected ہوگی $\Leftrightarrow$ وہ ایک Interval ہے۔

14۔ Lebesgue Covering Lemma کو بیان اور ثابت کرو۔

☆☆☆