Maulana Azad National Urdu University

M.Sc : Mathematics II Semester Examination - May - 2018

Paper : MSMM203CCT : Complex Analysis

Total Marks : 70 **Time : 3 hours**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. **حصہ اول** میں **10** لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات / خالی جگہ پُر کرنا / مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. **حصہ دوم** میں آٹھ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو **(200)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **6** نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. **حصہ سوم** میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو **(500)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **10** نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال: 1

i۔ $f(z)=2xy+i(x^2-y^2)$ analytic فنکشن ہے (صحیح / غلط)

ii۔ $\frac{z^3-1}{z(z^2-1)}$ کے singular points -------- ہیں۔

(a) 1, 0, 0 (b) 0, -1, -1

(c) 0, 1, -1 (d) ان میں کوئی بھی نہیں

iii۔ اگر C ایک بند (closed) curve ہے تب $\int_C dz =$

(a) 0 (b) 2π

(c) $2\pi i$ (d) $-2\pi i$

iv۔ $\int_C \frac{dz}{z} =$ ، جہاں C ایک دائرہ (circle) ہے جسکا مرکز O(0,0) اور radius r ہے

(a) 0 (b) 2π

(c) $2\pi i$ (d) $-2\pi i$

v۔ $f(z)=|z|^2$ ----------- ہے

(a) ہر طرف differentiable ہے (b) origin z_0 پر differentiable ہے

(c) کہیں بھی differentiable نہیں (d) x-axis پر differentiable ہے

vi۔ $f(z)=\frac{1}{z(1-z^2)}$ کے پولس (poles) لکھو۔

vii۔ $z=0$ ، $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^3}$ کے لیے ---------- ہے

(a) Essential singularity   (b) Branch point

(c) Simple pole   (d) Removable singularity

viii Meromorphic function کی تعریف کرو۔

xi۔ ایسے نقاط (points) جہاں $f(z)=z^4-z^2$ conformal نہ ہو ------- ہیں۔

(a) $0,\sqrt{2},-\sqrt{2}$ (b) $0,1,-1$

(c) $0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$ (d) $0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}$

x۔ Transformation $w=z^2$ کے تحت $x=a,\ (a>0)$ کا image -------- ہے

(a) an ellipse   (b) a circle

(c) a hyperbola   (d) a parabola

حصہ دوم

2۔ بتلاؤ کہ $f(z)=xy+iy$ ہرطرف continuous ہے لیکن analytic نہیں ہے۔

3۔ Analytic function $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ معلوم کرو جبکہ $v(r,\theta)=r^2\cos 2\theta-r\cos\theta+2$ ہے۔

4۔ $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\sin^6 z}{\left[z-(\pi/6)\right]}dz$ کو اخذ (Evaluate) کرو ۔

5۔ فنکشن $f(z)=5\sin 2z$ کے لیے Cauchy's Theorem کو verify کرو، جہاں C ایسا square ہیں جسکے vertices $1\pm i$ اور $-1\pm i$ ہیں۔

6۔ تفاعل (function) $\dfrac{(z-2)(z+2)}{(z+1)(z+4)}$ ، $1<|z|<4$ کو لارنٹ کے سلسلے (Laurent's series) میں حاصل کرو۔

7۔ اگر $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ تو اس کا $z=1,2,3$ پر ریسیڈیو (Residue) معلوم کرو۔

8۔ Transformation $z=\dfrac{i-w}{i+w}$ کے لیے بتلاؤ کے w-plane کا positive half جو $v\geq 0$ ، z-plane کے دائرے (circle) $|z|\leq 1$ سے correspond کرتا ہے۔

9۔ Bilinear تحویل تلاش کریں جو نقطہ $(2,i,-2)$ کو نقطہ $(1,i,-1)$ میں نقش کرتا ہے۔

حصہ سوم

10۔ Analicity کے sufficient condition کو بیان اور ثابت کرو۔

11۔ (i) Harmonic function اور Harmonic conjugate کی تعریف کرو۔ اگر $u = y^3 - 3x^2y$ ہو تب بتلاؤ کہ u harmonic ہے اور اس کا harmonic conjugate معلوم کرو۔

(ii) اگر $u = e^x \cos y$ analytic function $f(z)$ کا real part ہے تب $f(z)$ معلوم کرو۔

12۔ Taylor's Theorem کو بیان اور ثابت کرو۔

13۔ بتلاؤ کہ $(a > 1)$, $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a\cos\theta}{a+\cos\theta} d\theta = 2\pi a \left\{1 - \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right\}$

14۔ (i) $w = \frac{(2+i)z-2}{z+i}$ کے fixed points اور Normal form معلوم کرو۔

(ii) transformation $w = z^2$ کے ذریعہ بتلاؤ کہ z-plane کے circles $|z-a| = c \quad (a, c \in \mathbb{R})$، w-plane کے Limacon سے correspond کرتے ہیں۔

☆ ☆ ☆