Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Maths) III Semester Examination - December - 2018

MSMM301CCT : Functional Analysis

پرچہ : تفاعلی تجزیہ

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. **حصہ اول** میں **10** لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات / خالی جگہ پُر کرنا / مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. **حصہ دوم** میں آٹھ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو **(200)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **6** نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. **حصہ سوم** میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو **(500)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **10** نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال نمبر : 1

(i) 'Q' کا Completion .... ہے۔

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{Q}$ (c) $\mathbb{C}$ (d) ان میں سے کوئی نہیں

(ii) ایک Normed Space پر Functional کی تعریف کرو۔

(iii) H 'Hilbert Space' میں $\{0\}^{\perp}$ = ... ہے۔

(iv) 'IPVS $\mathbb{C}^3$ کا Inner Product .... ہے۔

(v) Identity Operator مثبت (Positive) ہے۔ (صحیح/غلط)

(vi) Linear Operator کے Graph کی تعریف کرو۔

(vii) Operator $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ جس کی تعریف $T(x)=x^2$ ہے۔ اس کے Fixed Points .... ہیں۔

(viii) 'Contraction Map' Uniformly Continuous ہوگا۔ (صحیح/غلط)

(ix) Operator $T:H\to H$ Self Adjoint ہوگا اگر ....

(x) Normal Operator" کی تعریف کرو۔

حصہ دوم

(2) Normed Space کی تعریف کرو۔ثابت کروکہ ہر Normed Space ایک Metric Space ہوگا۔

(3) اگر X ایک Normed Spaced اس طرح ہے کہ $F(w) = 0 \forall F \in X^*$ تب بتلاؤ کہ w=0 ہوگا۔

(4) Hilbert Space کے ایک سٹ S کے Orthogonal Complement کی تعریف کرو۔ثابت کروکہ Hilbert Space ’ H کے ہر تحت سٹ S کے لیے $H'S^{\perp}$ کی تحت فضا (Sub Space) ہے۔

(5) "Bessels Inequality" کو بیان اور ثابت کرو۔

(6) اگر N ایک Normed Linear Space ہے اور $x_0 \neq \bar{0} \in N$ تب ثابت کروکہ $f_0 \in N^*$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $f_o(x_o) = \|x_o\|$ اور $\|f_o\| = 1$

(7) اگر 'T' Normal Operator ہے تب بتلاؤ کہ $\|T^2\| = \|T\|^2$ ہے۔

(8) Contraction Map کی تعریف کرو۔ایک مثال دو۔

(9) مقررہ نقطہ (Fixed Point) کی تعریف کرو۔ $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, T(x) = x^3 \ \forall x \in \mathbb{R}$ اور $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ‘ $T(x_1,x_2) = x_1$ کے Fixed Points معلوم کرو۔

حصہ سوم

(10) ثابت کروکہ Space l_2^n جس میں $x = (x_1, x_2 \dots x_n) \in l_2^n$ کے لیے $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$ ہو ایک Banach Space ہے۔

(11) Hilbert Space کی تعریف کرو۔اگر M' Hilbert Space ‘ H کی ایک بند تحت فضا (Closed Subspace) ہے تب ثابت کروکہ $H = M \oplus M^{\perp}$ ہے۔

(12) B(H) پر Adjoint Operation کے لیے حسب ذیل کو ثابت کرو۔

(i) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$ (ii) $\|T^*\| = \|T\|$

(iii) $T^{**} = T$ (iv) $\|T^* T\| = \|T\|^2$

(13) Open Mapping Theorem کو بیان اور ثابت کرو۔

(14) Banach Contraction Principle کو بیان اور ثابت کرو۔

☆☆☆