Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Maths) III Semester Examination - December - 2018

MSMM302CCT : Advanced Algebra

پرچہ : ایڈوانسڈ الجبرا

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں **10** لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**

2. حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو **(200)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **6** نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**

3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو **(500)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **10** نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال نمبر 1 :

(i) کیا Polynomial $5x^4+7x^3+14x^2-7x+35$ $\mathbb{Q}$ پر Irreducible ہے۔ (صحیح/غلط)

(ii) $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{5}} \in \mathbb{C}$ ، $\mathbb{Q}$ پر Algebraic ہے۔ (صحیح/غلط)

(iii) Kroneckers Theorem کو بیان کرو۔واضح کریں $f(x)=1+x^2 \in \mathbb{R}[x]$ کے لیے۔

(iv) تعریف کرو (a) Algebraically closed field K ، (b) ایک Field $\overline{F}$ کا Algebriac closure۔ایک مثال دو۔

(v) کیا $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{Q}$ کا Normal Extension ہے۔(صحیح / غلط) $\overline{\mathbb{Q}}$ ، $\mathbb{Q}$ کا کیا ہے۔

(vi) F پر Separable Extension E کی تعریف کرو ایک مثال دو۔

(vii) Galois Extension E/F اور اس کے Galois Group کی تعریف کرو اور ایک مثال دو۔

(viii) اگر E ، 7^9 Elements کا Finite Field ہے تب E کے Automorphism Group اور Generators کیا ہونگے؟

(ix) اگر $f(x)$ 'Characteristics Zero' والے Field پر Irreducible Polynomial ہو تو کیا اس کے ریشہ (roots) Distinct ہوتے ہیں۔ (صحیح/غلط)

(x) Cyclic Extension کی تعریف کرو اور دو مثالیں دو۔

حصہ دوم

(2) $\mathbb{Q}$ پر Minimal Polynomial $p(x)$ کی تعریف کرو۔ $\alpha=\sqrt[3]{1+i\sqrt{7}}\in\mathbb{C}$ کا Minimal Polynomial $\mathbb{Q}$ پر معلوم کرو۔ Adjunction Field $\mathbb{Q}(\alpha)$ کو بیان کرو۔ $\left[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}\right]$ کی قدر کیا ہوگی؟

(3) ایک مثال کے ذریعہ Finite Extension (i) Algebraic Extension (ii) کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ ہر Finite Extension ، Algebraic ہوتا ہے۔

(4) بتلاؤ کہ Complex Numbers کا میدان (Field) $\mathbb{C}$ Algebraically Closed ہوتا ہے۔ (i) $\mathbb{Q}$ اور (ii) $\mathbb{R}$ کے Algebaic Closures لکھیں۔ دو Real Algebraic اور دو Transcendental Numbers لکھو۔

(5) بتلاؤ کہ ہر Degree '2' کا Extension ، Normal Extension ہوگا۔

(6) $f(x)=x^5-1\in\mathbb{Q}[x]$ کے Splitting Field معلوم کرو۔ $[K:\mathbb{Q}]$ کیا ہے۔ کیا K ، $\mathbb{Q}$ کا Galois Extension ہے؟

(7) (a) 49 عناصر (Elements) اور (b) 3^4 عناصر (Elements) والے میدان E کو Construct کریں۔ E کے Automorphism Groups اور اس کے Generators کو لکھیں۔

(8) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)=E$ کا Galois Group $\mathbb{Q}$ پر معلوم کرو۔ کیا $E/\mathbb{Q}$ Galois ہوگا۔

(9) Ruler اور Compass کے استعمال سے بتلاؤ کہ زاویہ (Angle) $\alpha=54^0$ کے تین برابر حصے ہو سکتے ہیں۔

یا (OR)

Ruler اور Compass کے طریقے سے 15-gon Construct ہوسکتا ہے یا نہیں وضاحت کرو۔

حصہ سوم

(10) (a) بتلاؤ کہ $\sqrt{2}$ اور $\sqrt{7}$ $\mathbb{Q}$ پر Algebraic ہیں۔ (i) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ (ii) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{7}\right)$ (iii) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{14}\right)$ (iv) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)$ کے Adjunction Fields کے elements کو بیان کرو۔

(b) $\mathbb{Q}$ پر (i) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ (ii) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{7}\right)$ (iii) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{14}\right)$ (iv) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)$ (v) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{7}\right)$ کے Degrees of Extension معلوم کرو اور $\mathbb{Q}$ پر $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{7}\right)$ کی basis معلوم کرو۔

(11) $\mathbb{Q}$ پر $f(x)=x^3-2\in\mathbb{Q}[x]$ کی Splitting Field K معلوم کرو۔ کیا K، $\mathbb{Q}$ کا Galois Extension ہے؟ اگر ہاں ہو تو اُس کا Galois Group معلوم کرو۔

(12) Galois Theory کے بنیادی نظریہ (Main Theorem) کو بیان (State) کرو۔ $\mathbb{Q}$ پر $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ کے 1-1 Correspondence کو بیان کرو۔

(13) فرض کرو کہ اگر $f(x) = x^8 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ ہے۔

(i) تمام Primitive 8^{th} roots of unity معلوم کرو۔

(ii) Cyclotomic Polynomial $\Phi_8(x) \in \mathbb{Z}[x]$ لکھیے۔

(iii) $\Phi_8(x) \in \mathbb{Z}[x]$ کے Splitting Field K معلوم کرو۔

(iv) بتلاؤ کہ $K/\mathbb{Q}$ Galois ہے۔ $[K:\mathbb{Q}]$ کیا ہے۔

(v) Galois Group $G(K/\mathbb{Q})$ ، $\mathbb{Z}_8$ کی مدد سے معلوم کرو۔

(14) بتلاؤ کہ Quintic Polynomial $f(x) = x^5 - 8x + 6 \in \mathbb{Q}[x]$ Radicals کے طریقے سے Solvable نہیں ہے۔ اس کے ثبوت کے استعمال کے Results لکھو۔

☆☆☆