Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. Maths (MSMM301CCT) III Semester Examination - December - 2017

Paper : Functional Analysis

پرچہ : تفاعلی تجزیہ

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. **حصہ اول** میں **10** لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات / خالی جگہ پُر کرنا / مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. **حصہ دوم** میں آٹھ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو **(200)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **6** نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. **حصہ سوم** میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو **(500)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **10** نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال نمبر : 1

(i) ایک نارمڈ فضاء (Normed Space) کی مثال دو۔

(ii) Convex Functional کی تعریف کرو۔

(iii) H 'Hilbert Space میں $\{0\}^{\perp} =$ __________ اور $H^{\perp} =$ __________ ہیں۔

(iv) R^3 'IPVS کا Inner Product ____________ ہوگا۔

(v) Identity Operator مثبت (Positive) ہے۔ (صحیح / غلط)

(vi) Linear Operator کے Graph کی تعریف کرو۔

(vii) Identity Operator کے Fixed Points _____________ ہیں۔

(viii) اگر $T: R \to R$ کی تعریف اس طرح کی گئی ہے کہ $T(x) = x^2$ تب 'T' کے Fixed Points __________ ہیں۔

(a) 0, 1 (b) 1, 2 (c) -1, 0 (d) ان میں کوئی نہیں

(ix) ایک $T: H \to H$ Operator، Self Adjoint ہوگا اگر T* = __________ ہو۔

(x) Contraction Map کی ایک مثال دو۔

P.T.O

حصہ دوم

(2) ثابت کروکہ Normed Space N کا ہر Compact Subspace باؤنڈڈ (Bounded) ہے۔

(3) اگر $T: N \rightarrow N^1$ ایک Linear Transformation ہے تب ثابت کروکہ بیانات (i) T is Continuous on N اور (ii) N پر T Bounded ہے۔ ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔

(4) Hilbert Space کے ایک سٹ 'S' کے Orthogonal Complement کی تعریف کرو۔ اگر 'S' Hilbert فضاء H کا ایک تحت سٹ ہے تب ثابت کروکہ $'S^{\perp}$ H کی تحت فضاء (Subspace) ہے۔

(5) ثابت کروکہ ہلبرٹ فضاء (Hilbert Space) پر Self Adjoint 'T' Operator ہے $\Leftrightarrow < Tx, x >$ حقیقی عدد (Real Number) ہے $\forall x \in H$ کے لیے۔

(6) Hahn Banach Theorem کو بیان کرو۔ اگر N ایک Normed Linear Space ہے اور $x_0 \neq \bar{0} \in N$ تب ثابت کروکہ $f_0 \in N^*$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $f(x_0) = \|x_0\|$ ، اور $\|f_0\| = 1$ ۔

(7) Open Mapping اور Closed Graph کے نظریات کے بیانات لکھیے۔

(8) 'Contraction Map' کی تعریف کرو۔ ثابت کروکہ ہر 'Contraction Map Uniformly Continuous ہوگا۔

(9) مقررہ نقطہ (Fixed Point) کی تعریف کرو۔

(i) $T: R \rightarrow R, T(x) = x^3 \, \forall x \in R$ اور (ii) $T: R^2 \rightarrow R, T(x_1, x_2) = x_1$ کے Fixed Points معلوم کرو۔

حصہ سوم

(10) ثابت کروکہ Space l_{∞}^n جس میں $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in l_{\infty}^n$ کے لیے $\|x\| = Max\{|x_1|, |x_2|, - - - |x_n|\}$ ہوا ایک Banach Space ہے۔

(11) Hilbert Space کی تعریف کرو۔ اگر 'M' Hilbert Space 'H' کی ایک بند تحت فضاء (Closed Subspace) ہے تب ثابت کرو کہ $H = M \oplus M^{\perp}$ ہے۔

(12) B (H) پر Adjoint Operation کے لیے حسب ذیل کو ثابت کرو۔

(i) $(T_1T_2)^* = T_2^* T_1^*$ (ii) $\|T^*\| = \|T\|$ (iii) $T^{**} = T$ (iv) $\|T^*T\| = \|T\|^2$

(13) Closed Linear Transformation کی تعریف کرو۔ ثابت کروکہ ایک 'Linear Transformation 'T Closed ہے $T \Leftrightarrow$ کا Graph T_G ایک بند تحت فضاء (Closed Subspace) ہوگی۔

(14) Banach Contraction Principle کو بیان اور ثابت کرو۔

☆☆☆