Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (MSMM302CCT) Maths III Semester Examination - December - 2017

Paper : Advance Algebra

پرچہ : اعلیٰ الجبرا

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. **حصہ اول** میں **10** لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. **حصہ دوم** میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو **(200)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **6** نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. **حصہ سوم** میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو **(500)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **10** نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال نمبر : 1

(i) ہر 'Q' Polynomial پر Reducible ہے۔ (صحیح / غلط)

(ii) $\alpha = e^{2\Pi i/29}$ 'Q' پر الجبرائی (Algebraic) ہے۔ (صحیح / غلط)

(iii) اگر $\alpha = \sqrt[6]{1+\sqrt[5]{1+i\sqrt[3]{2}}}$ ہو تب Q پر $Q(\alpha)$ کی Degree ________ ہے۔

(iv) $f(x) \in F[x]$ کی F پر Splitting Field کی تعریف کرو۔ ایک مثال دو۔

(v) Q '$\mathbb{R}$' کا Normal Extension ہے۔ (صحیح / غلط)

(vi) اگر میدان (Field) E میں 5^{7X4} عناصر (Elements) ہیں تب E کو ایک 'F' Finite Field کے Finite Extension کی طرح ظاہر کرو۔

(vii) 'K' Perfect Field کی تعریف دو مثال دے کر کرو۔

(viii) اگر 'F' 7^{12} عناصر (Elements) کا میدان ہے تب F کے Automorphism Group کا رتبہ (Order) معلوم کرو۔ نیز اسکا Generator معلوم کرو۔

(ix) Field F کے Galois Extension E کی تعریف کرو ایک مثال دو۔

(x) F پر Cyclic Extension کی تعریف ایک مثال کے ساتھ کرو۔

حصہ دوم

(2) $\alpha=\sqrt[4]{1+i\sqrt{5}}$ کا Minimal Polynomial 'P(x' Q پرمعلوم کرو۔ Q پر Adjunction Field Q (x) اوراسکی basis معلوم کرو۔ $[Q(\alpha):Q]$ کی قدرکیاہے؟

(3) 'F' Algebraically closed field کی تعریف کرو۔ بتلاؤکہ $\mathbb{C}$ Algebraically closed ہے۔ کیا $\mathbb{C}$ ، $\mathbb{R}$ کا Algebraic Closure ہے؟ وضاحت کرو۔

(4) کیا Q کا Algebraic closure $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ کا Subfield ہوگا یا نہیں۔ وضاحت کرو۔ Algebraic closure اوراسکے complement میں کتنے elements ہونگے بتلایئے۔ complement کے دو elements لکھیے۔

(5) بتلاؤکہ میدان F (Field) کاہر K Extension جبکہ [K:F]=2 ہے normal ہوگا۔

(6) (i) 25 اور (ii) 32 عناصر کے Finite Fields بناؤ اور وضاحت کرو۔

(7) 'Q' کو Fixed رکھتے ہوئے $Q(\sqrt[3]{2})$ کےتمام Automorphims معلوم کرو۔ اس گروپ کا Order معلوم کرو نیزاس کارشتہ $[Q\sqrt[3]{2}:Q]$ سے کیاہے؟

(8) $Q(\sqrt{3},\sqrt{5})$ کا Galois Group 'Q' پرمعلوم کرو۔

(9) Ruler & Compass کےطریقے سے 17-gon کے Construction کے بارے میں لکھیے۔

حصہ سوم

(10) (a) بتلاؤکہ $\sqrt{2}$ اور $\sqrt{5}$ Q پر Algebraic ہیں۔ (i) $Q(\sqrt{2})$ (ii) $Q(\sqrt{5})$ اور $Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})$ کےعناصر (Elements) کیسے دکھتے ہیں بتلاؤ۔

(b) Q پر (i) $Q(\sqrt{2})$ (ii) $Q(\sqrt{5})$ (iii) $Q(\sqrt{10})$ (iv) $Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})$ (v) $Q(\sqrt{2},\sqrt{5})$ کی basis معلوم کرو۔

(11) (a) Q پر $x^3-2\in Q[x]$ کی Splitting Field 'K' معلوم کرو نیز [K:Q] کی قدرمعلوم کرو۔

(b) Q پر $x^7-1\in Q[x]$ کی Splitting Field اور [K:Q] کی قدرمعلوم کرو۔ کیا ایسے Polynomials $x^p-1(p\ prime)$ اور $x^n-1(n\in\mathbb{Z}^+)$ کے لیے generalize کرسکتے ہیں؟

(12) Galois Theory کے بنیادی نظریہ کوبیان کرکے اس نظریہ کو 'Q' پر Galois Group $Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ کے لیے سمجھاؤ۔

(13) اگر $'\alpha'$ x^5-1 کا Root ہے $(\alpha\neq 1)$ تب Q پر $Q(\alpha)$ کا Galois Group معلوم کرو۔ بتلاؤکہ وہ رتبہ '4' والا Cyclic Group ہے۔ کیا $Q(\alpha)$' Q پر Cyclic Extension ہے؟

(14) بتلاؤکہ کثیررکنی (Polynomial) $f(x)=x^5-4x+2$ Solvable by Radicals نہیں ہوگا۔

☆☆☆