Maulana Azad National Urdu University

M.Sc : Mathematics IV Semester Examination - May - 2019

Paper : MSMM401CCT : Wavelet Analysis and Applications

Total Marks : 70 **Time : 3 hours**

ہدایات:

یہ پرچۂ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. **حصہ اول** میں **10** لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. **حصہ دوم** میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو **(200)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **6** نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. **حصہ سوم** میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو **(500)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **10** نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال: 1

(i) Periodic فنکشن کی تعریف کرو۔

(ii) Fourier Series کا فارمولہ لکھو۔

(iii) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx$ .... ہوتا ہے۔

(iv) $\hat{f}(\omega)$ .... ہوتا ہے۔

(v) $\chi_{[-a,\, a]}(t)$ .... ہوتا ہے۔

(vi) $F[D_{1/a} f(t)]$ .... ہوتا ہے۔

(vii) Inverse Fourier Transform کا فارمولہ .... ہوتا ہے۔

(viii) Mexican Hat Wavelet کا فارمولہ........................ ہوتا ہے۔

(ix) $(W_{\alpha\psi+\beta\varphi} f)\ (a,b)$ .... ہوتا ہے۔

(x) MRA میں Separation کی تعریف کرو۔

حصہ دوم

2۔ فنکشن کے لیے Fourier Series معلوم کرو اور $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ x, & 0\le x<\pi\end{cases}$

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ کو Deduce کرو۔

3۔ $f(x)=\begin{cases}\cos(\frac{\pi x}{l}), & 0\le x\le \frac{l}{2}\\ 0, & \frac{l}{2}\le x\le l\end{cases}$ فنکشن کو Cosine Series کے لیے Expend کرو۔

4۔ $g(t)=e^{-at^2}, a>0$ فنکشن کا Fourier Transform معلوم کرو۔

5۔ اگر f اور tf دونوں $L^1(R)$ میں belong کرتے ہیں تو ثابت کرو کہ $\frac{d}{d\omega}(\hat{f}(\omega))=(-i)(t\,\hat{f}(t))$ ہوگا۔

6۔ مان لو $f, g, h\in L^2(R)$ اور α,β دونوں arbituary کونسٹنٹ (Constant) ہیں تب ثابت کرو کہ۔

(a) $G_g[T_a f](t,\omega)=G_g[f(x-a)](t,\omega)=e^{iaw}\ G_g\ f(t-a,\omega)$

(b) $G_g[M_a f](t,\omega)=G_g[e^{iax}f(x)](t,\omega)=G_g\ f(t,\omega-a)=T_a\,G_g f(t,\omega)$

7۔ مان لو ψ ایک Wavelet ہے اور φ ایک Bounded انٹگریبل فنکشن ہے تو ثابت کرو کہ $(\psi*\varphi)$ کنولوشن (Convolution) فنکشن ایک Wavelet ہے۔

8۔ کسی بھی $\varphi\in L^2(R)$ کے لیے ذیل میں دی گئی Conditions برابر (Equivalent) ہیں۔

(a) $\{\phi_{0,k}=\phi(t-k)!k\in z\}$ نظام (System) آرتھوگونل (Orthogonal) ہے۔

(b) $\sum_{k\in z}\left|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)^2\right|=1$

9۔ مان لو MRA کا Scaling فنکشن ہے تب $\hat{\varphi}$ Fourier Transform کو لامحدود مصنوعات (Infinite Products) $\hat{\varphi}(\omega)=\prod_{k=1}^{\infty}m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right)$ سے Represent کر سکتے ہیں۔

حصہ سوم

10۔ Fourier Series کی Complex فارم (Form) کو اخذ (Derive) کرو۔

11 ۔ (a) اگر $f \in L^1(R) \cap L^2(R)$ تب ثابت کرو کہ $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_2^2$ ہوگا۔

(b) اگر $f, g \in L^1(R) \cap L^2(R)$ تب ثابت کرو کہ $< f, g > = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt = \frac{1}{2\pi} < \hat{f}, \hat{g} >$ ہوگا۔

12۔ اگر $\psi \in L^2(R)$ اور $(W_\psi f)(a,b)$, f کے لیے CWT ہو جس کی تعریف $W_\psi f(a,b) = < f, \psi_{a,b} > = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{\psi_{a,b}(t)}\, dt$ ہو تب $f, g \in L^2(R)$ کسی بھی دو فنکشن کے لیے ثابت کرو کہ $< f, g > = \frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(a,b)\overline{(W_\psi g)(a,b)}\frac{da\,db}{a^2}$ ہوگا جہاں $C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega$ ہے۔

13۔ Wavelet کے اپلی کیشن پر بحث کرو۔

14۔ Fourier Series کے لیے Panseval's تھیورم کو بیان اور ثابت کرو۔

☆ ☆ ☆