Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Mathematics)

I - Semester Examination - November / December - 2014

Paper I -MM111 : Real Analysis - I

پہلا پرچہ : حقیقی تجزیہ ۔ I

Total Marks : 70 **Time : 3 hours**

378

نوٹ: ہر سیکشن سے دو سوالات لازمی طور پر حل کرتے ہوئے جملہ (10) دس سوالات حل کریں۔ تمام سوالات کے مساوی نشانات ہیں۔

(Answer ten questions by choosing any two from each section. All questions carries equal marks)

I) 1۔ ایک شمار پذیر سیٹ کی تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ شمار پذیر سیٹ کا ہر لامتناہی تحت سٹ بھی شمار پذیر ہوتا ہے۔

(Define a countable set and prove that every infinite subset of a countable set is countable.)

2۔ (i) کھلا سٹ (ii) بند سٹ کی تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ ایک سٹ E کھلا ہوگا $\Leftrightarrow$ اسکا تتمہ (Complement) بند ہو۔

(Define (i) Open set and (ii) closed set.Prove that a set is open $\Leftrightarrow$ its complement is closed.)

3۔ ثابت کرو کہ ایک میٹرک فضاء کے compact تحت سٹ ہمیشہ بند ہوتے ہیں۔

(Prove that the compact subsets of a metric space are always closed.)

II) 4۔ ثابت کرو کہ ایک میٹرک فضاء X کو میٹرک فضاء Y میں نقش کرنے والی تفاعل X پر مسلسل ہوتی ہے اگر اور صرف اگر X میں $f^{-1}(V)$ کھلا ہے ہر کھلے سٹ $V \in Y$ کیلئے۔

(Prove that a mapping 'f' of a metric space X into a metric space Y is continuous on X f-1(V) is open in X for every open set V in Y.)

5۔ ثابت کرو کہ ایک کامپیاکٹ میٹرک فضاء کی مسلسل عکس بھی کامپیاکٹ ہے۔

(Prove that continuous image of a compact space is compact.)

6۔ ثابت کرو کہ ایک کامپیاکٹ میٹرک فضاء X کی ایک اور میٹرک فضاء Y میں ایک مسلسل نقش یکساں مسلسل ہے۔

(Prove that a continuous mapping of a compact metric space X into another metric space Y is uniformly continuous.)

III) 7۔ اگر ایک پارٹیشن P کا refinement P^* ہو تب ثابت کرو کہ

$$L(P,f,\alpha) \le L(P^*,f,\alpha)$$

(If P* is a refinement of a partition P then Prove that

$$L(P,f,\alpha) \le L(P^*,f,\alpha)$$

P.T.O.

8- ثابت کرو کہ وقفہ [a,b] پر $f \in R(\alpha)$ اگر اور صرف اگر $\varepsilon > 0$ کیلئے ایک [a,b] کا ایک پارٹیشن P اس طرح وجود رکھتا ہے کہ
$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\in$

(Prove that $f \in R(\alpha)$ on [a,b] $\Leftrightarrow$ to each $\varepsilon > 0$ $\exists$ a partition P of [a,b] such that $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\in$.)

9- ثابت کرو کہ [a,b] پر ایک مسلسل تفاعل [a,b] پر ریمان اسٹلجس تکمل پذیر ہے۔

(Prove that every continuous function on [a,b] is Riemann Stieltje's integrable on [a,b].)

(IV

10- یکساں طور پر استدقاق کی تعریف کرو۔ کسی تفاعلوں کے تواتر کے یکساں استدقاق کیلئے کوشی کی کسوٹی کو بیان اور ثابت کرو۔

(Define uniform convergence. State and Prove Cauchy's criterion of uniform convergence for a sequence of functions)

11- فرض کرو کہ کسی سٹ E جو ایک میٹرک فضاء میں ہو کیلئے $f_n \to f$ نیز فرض کرو کہ E کا انتہائی نقطہ x ہے اور $\lim_{t \to x} f_n(t) = A_n \ (n=1,2,3.....)$ تب $\{A_n\}$ متدق ہوگا اور $\lim_{t \to x} f(t) = A_n$ ۔

(Suppose $f_n \to f$ uniformly on a set E in a metric space. Let x be a limit point of E and $\lim_{t \to x} f_n(t) = A_n \ (n=1,2,3.....)$ then $\{A_n\}$ converges and $\lim_{t \to x} f(t) = A_n$.)

12. اگر E پر $\{f_n\}$ ایک مسلسل تفاعلات کا تواتر ہو اور اگر یکساں طور پر $f_n \to f$ تب E پر f مسلسل ہے۔

(Let $\{f_n\}$ is a sequence of continuous functions on E and if $f_n \to f$ uniformly on E then f is continuous on E.)

(V

13- ثابت کرو کہ E ہر ایک K-Cell کامپیاکٹ ہے۔

(Prove that every K-cell is compact.)

14 - غیر مسلسلات (discontinuities) کے اقسام کی تشریح موزوں مثالوں کے ساتھ کرو۔

(Explain the types of discontinuities with suitable examples)

15- ثابت کرو کہ $\underline{\int_a^b} f\,d\alpha \le \overline{\int_a^b} f\,d\alpha$ ۔

(Prove that $\underline{\int_a^b} f\,d\alpha \le \overline{\int_a^b} f\,d\alpha$.)

16- فرض کرو کہ $x \in E$ کیلئے $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ اگر $M_n = \sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|$ تب $f_n \to f$ uniformly on E $\Leftrightarrow Mn \to 0$ جبکہ $n \to \infty$

(Suppose $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $x \in E$. If $M_n = \sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|$ then $f_n \to f$ uniformly on $E \Leftrightarrow M_n \to 0$ $n \to \infty$.)

☆☆☆