Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Mathematics)

I - Semester Examination November / December - 2014

Paper II. MM112 : Linear Algebra

دوسرا پرچہ : خطی الجبرا

Total Marks : 70 **Time : 3 hours**

379

نوٹ: ہر سیکشن سے دو سوالات لازمی طور پر حل کرتے ہوئے جملہ (10) دس سوالات حل کریں۔ تمام سوالات کے مساوی نشانات ہیں۔

(Answer ten questions by choosing any two from each section. All questions carries equal marks)

(I 1۔ ایک برداری فضاء کی تعریف کرو V میں برداروں $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ کے خطی امتزاج کی تعریف کرو۔ برداروں کا میدان F پر خطی طور پر تابع اور غیر تابع ہونے کی تعریف کرو۔

(Define a Vector Space V. Define linear combination of vectors $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ in V. Define linear dependence and independence of vectors over the field F.)

2۔ کسی برداری فضاء V(F) کے تحت فضاء کی تعریف کرو کسی میدان F پر برداری فضاء کے ابعاد سے کیا مراد ہے۔ اگر ایک محدود ابعادی برداری فضاء V کے دو تحت فضاء U اور W ہوں تو ثابت کرو کہ dim (U+W) = dim(U) + dim(W) - dim($U \cap W$)

(Define the subspace of a vector space V(F). What do you mean by the dimension of a vector space over F. If U and W are two subspaces of a finite dimensionalvector space V then prove that dim (U+W) = dim(U) + dim(W) - dim ($U \cap W$).)

3۔ برداروں $\alpha_1 = (1,0,-1), \alpha_2 = (1,2,1), \alpha_3 = (0,-3,2)$ کی خطی طور پر تابع ہونے کا امتحان کرو۔

(Examine the vectors $\alpha_1 = (1,0,-1), \alpha_2 = (1,2,1), \alpha_3 = (0,-3,2)$ for linear dependence.)

(II 4۔ اگر ایک برداری فضا V(F) میں A، B، C خطی تحویلات اس طرح ہوں کہ AB = CA=I تب A کا معکوس وجود رکھتا ہے اور B = C = A^{-1}۔

(If A, B, C are linear transformations on a vector space V(F) such that AB = CA=I, then A is Invertible and B = C = A^{-1}.)

5۔ کسی میدان F پر کسی برداری فضاء V کی ایک اور برداری فضاء W پر خطی تحویل کی تعریف کرو۔ اگر V ایک برداری فضاء ہو تو بتلاؤ کہ تماثلی تحویل $I\alpha = \alpha$ اور $0\alpha = 0$ بھی V سے V پر خطی تحویلات ہیں۔

(Define linear transformation from a vector space V into a vector space W over the field F. If V Is any vector space, show that the identity transformation, defined by I $\alpha = \alpha$ and $0\alpha = 0$ are also linear transformations from V into V.)

6- اگر V اور W دو برداری فضائیں ہیں جسکے ابعاد بالترتیب m اور n ہوں تب F پر dim Hom(V,W)=mn۔

(If V and W vector spaces are of dimension m and n respectively, then the dim Hom(V,W) is mn over F.)

III) 7- آئگنی قیمتیں اور آئگنی برداروں کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ کسی تحویل T کے جداجدا آئگنی برداریں جو کہ جداجدا آئگنی قیمتوں کے مطابق ہوں، خطی طور پر غیر تابع ہونگے۔

(Define eigen values and eigen vectors. Show that the distinct eigen vectors of a transformation T corresponding to distinct eigen values of T are linearly independent.)

8- ایک متشابہ ماترس کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ متشابہ ماترسوں کے خصوصی کثیر رکنیاں مشابہہ ہونگی۔

(Define a similar matrix. Show that similar matrices have the same characteristic polynomial.)

9- بتلاؤ کہ دو محدود ابعادی برداری فضائیں جو کہ ایک ہی میدان پر ہوں، isomorphic ہونگی اگر اور صرف اگر ان کے ابعاد مساوی ہونگے۔

(Show that two finite dimensional vector spaces over the same field are isomorphic iff they are of same dimension.)

(IV

10- برداری فضاء V(F) پر داخلی حاصل ضرب کی تعریف کرو۔ اسکی مثال دو۔ ایک داخلی حاصل ضربی فضاء کی تعریف کرو۔ اگر V ایک داخلی حاصل ضربی فضا ہو تب بتلاؤ کہ کسی $\alpha \varepsilon V$ اور ایک میزانی c کیلئے $\|c\alpha\| = |c|\ \|\alpha\|$۔

(Define an inner product on a vector space V(F). Give an example. Define an inner product Space. If V is an inner product space, then show that for any $\alpha \varepsilon V$ and any scalar c, $\|c\alpha\| = |c|\ \|\alpha\|$.)

11- شوارز کی نامساوات کو بیان اور ثابت کرو۔ (State and Prove the Schwarz's Inequality.)

12. بتلاؤ کہ ہر محدود ابعادی داخلی حاصل ضربی فضا Orthonormal basis رکھتی ہے۔

(Show that every finite-dimensional inner product space has an orthonormal basis.)

(V

13- سلوسٹر کے قانون کو بیان اور ثابت کرو۔ (State and Prove Sylvester's law.)

14- R^2 سے R^2 کے ذیل کے کون سے تفاعلات T خطی تحویل ہیں۔

i) $T(x_1,x_2) = (1+x_1,x_2)$ ii) $T(x_1,x_2) = (x_1 - x_2,\ 0)$

(Which of the following functions T from R^2 to R^2 are linear transformations:

i) $T(x_1,x_2) = (1+x_1,x_2)$ ii) $T(x_1,x_2) = (x_1 - x_2,\ 0)$

Contd... on Pg.3

15۔ کیلے ہملٹن کے مسئلے کو بیان اور ثابت کرو۔

(State and Prove the Cayley-Hamilton theorem.)

16۔ کسی محدود ابعادی داخلی حاصل ضربی فضا پر ایک عمودی عامل کی تعریف کرو اور بتلاؤ کہ ایک محدود ابعادی داخلی حاصل ضربی فضا میں ہر self adjoint عامل کا ایک غیر صفری مخصوص بردار رکھتا ہے۔

(Define a normal operator T on a finite dimensional inner product space and show that on a finite dimensional inner product space of positive dimension, every self adjoint operator has a non-zero characteristic vector.)

☆☆☆