Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Mathematics)

I - Semester Examination November / December - 2015

Paper II. MM112 : Linear Algebra

دوسرا پرچہ : خطی الجبرا

Total Marks : 70 **Time : 3 hours**

نوٹ: ہر سیکشن سے دو سوالات لازمی طور پر حل کرتے ہوئے جملہ (10) دس سوالات حل کریں۔ تمام سوالات کے مساوی نشانات ہیں۔

(Answer ten questions by choosing any two from each section. All questions carries equal marks)

۱۔ برادری فضاء کی تعریف کرو۔ اگر F ایک میدان ہے بتلاؤ کہ n ۔گانوں $(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$ جبکہ $\alpha_i \in F$ کا سٹ جمع اور عددیہ ضرب سے ایک بردار ی فضاء ہے۔

(Give the definition of a Vector Space. If F is field show that set of all ordered n-tuples $(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$, where $\alpha_i \in F$, can be made to be a Vector Space by proper definition of addition of n-tuples and scalar multiplication.)

۲۔ اگر F پر V ایک برداری فضاء ہو تب ثابت کرو کہ

(i) $\alpha 0 = 0 \forall \alpha \in F$

(ii) $0.v = 0 \forall v \in V$

(iii) $(-\alpha)v = -(\alpha v) \forall \alpha \in F \forall v \in V$

(iv) $v \neq 0, \alpha v = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

(If V is a Vector Space over F then prove that

(i) $\alpha 0 = 0 \forall \alpha \in F$

(ii) $0.v = 0 \forall v \in V$

(iii) $(-\alpha)v = -(\alpha v) \forall \alpha \in F \forall v \in V$

(iv) $v \neq 0, \alpha v = 0 \Rightarrow \alpha = 0$)

۳۔ اگر F حقیقی اعداد کا میدان ہے تب ثابت کرو کہ بردار $(1,1,0,0)$ ، $(0,1,-1,0)$ اور $(0,0,0,3)$ $F^{(4)}$ میں خطی طور پر غیر تابع ہیں۔ $F^{(4)}$ میں خطی طور پر تابع برداروں کی ایک مثال دو۔

(If F is the field of real numbers, prove that the vectors (1, 1, 0, 0), (0, 1, -1, 0) and (0, 0, 0, 3) in $F^{(4)}$ are linearly independent over F. Give an example of linearly dependent vectors in $F^{(4)}$.)

(حصہ B)

۴۔ اگر U اور V دو برداری فضائیں ہیں تب Hom(U,V) میں جمع اور عددیہ ضرب کی اس طرح تعریف کرو کہ F ' Hom (U, V) پر برداری فضاء ہوگا۔ میدان F پر برداری فضاء V کی دوہری فضاء کسے کہتے ہیں۔

(If U and V are vector spaces over the field F, define an addition and a scalar multiplication in Hom (U, V) so as to make Hom (U, V) into a vector space over F. What is Dual Space of the Vector Space V over the field F?)

۵۔ اگر V ایک متناہی البعد کی برداری فضاء ہے اور $\psi : V \to V$ ایک برہم مارفیت ہے تب ثابت کرو کہ ψ ایک تا ایک ہوگا اور یک مارفیت بھی ہوگا۔

(If V is a finite dimensional vector space and ψ is a homomorphism from V onto V, prove that ψ must be one-to-one, and so is an isomorphism.)

۶۔ بتلاؤ کہ حقیقی اعداد پر m x n ماترس والا سٹ حقیقی اعداد پر برداری فضاء ہوگا۔

(Show that the set of m × n matrices with real entries is a vector space over real numbers.)

(حصہ C)

۷۔ کیلے۔ھملٹن قضیہ کو بیان کرو اور 2 x 2 ماترس کے لئے اس کی جانچ کرو۔

(State Cayley–Hamilton theorem and verify it for a 2 × 2 matrix.)

۸۔ مخصوص قیمتیں اور مخصوص بردار کی تعریف کرو۔ ماترس $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ کے مخصوص قیمتیں اور مخصوص بردار معلوم کرو

(Define Eigenvalues and Eigenvectors. Find the eigenvalues and eigenvectors of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{pmatrix})$$

۹۔ خطی مساواتوں کے نظام x + 2y –z = 4 ، 2x + y + z = -2 ، x + 2y + z = 2 کو ماترس کی شکل میں لا کر اس کا حل معلوم کرو۔

(Express the following system of linear equations in matrix form and find its solution

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 4 \\ 2x + y + z &= -2 \\ x + 2y + z &= 2) \end{aligned}$$

(حصہ D)

۱۰۔ اندرونی ضربی فضاء کی تعریف کرو۔ ایک مثال دو۔

(Define inner product space. Give an example of an inner product space.)

Contd... on Pg.3

۱۱۔ Gram-Schmidt عمودی طریقے کو بیان کرو۔

(Describe the Gram-Schmidt orthogonalisation process.)

۱۲۔ ہرمیشین ماترس کی تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ ہرمیشین ماترس کے مخصوص قیمتیں حقیقی ہیں۔

(Define a Hermitian Matrix. Prove that the Eigen values of a Hermitian matrix are real.)

(حصہ E)

۱۳۔ بتلاؤ کہ ایک متناہی البعد کی برداری فضاء کی کوئی بھی دو اساسوں میں عناصر کی تعداد مساوی ہوتی ہے۔

(If V is a finite dimensional vector space over F then show that any two bases of V have same number of elements.)

۱۴۔ (i) ہم مارفیت (ii) یک مارفیت (iii) کرنل کی ایک مثال کے ذریعے تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ ہم مارفیت کا کرنل ایک تحت فضاء ہے۔

(Give definitions and one example of each of the following: (i) Homomorphism (ii) Isomorphism (iii) Kernel. Prove that kernel of a homomorphism is a subspace.)

۱۵۔ ممیّز اور اقل ترین کثیر رکنی کی تعریف کرو۔ ناطق تحلیلی نظریہ کو بیان کرو۔

(Define Characteristic and minimal polynomial. State the Rational decomposition theorem.)

۱۶۔ خطی تحویل کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ 'V' پر ایک خطی تحویل Unitary ہوگا اگر اور صرف اگر 'T' V کی عمودی اساس کو عمودی اساس سے نقش کرتا ہے۔

(Define linear transformation. Show that linear transformation T on V is unitary if and only if it takes an orthonormal basis of V to a orthonormal basis of V.)