Maulana Azad National Urdu University

M.Sc : Mathematics II Semester Examination - May - 2018

Paper : MSMM203CCT : Complex Analysis

Total Marks : 70 **Time : 3 hours**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو (500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال: 1

i۔ $f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$ analytic فنکشن ہے (صحیح/ غلط)

ii۔ $\frac{z^3 - 1}{z(z^2 - 1)}$ کے singular points -------- ہیں۔

(a) 1, 0, 0 (b) 0, -1, -1

(c) 0, 1, -1 (d) ان میں کوئی بھی نہیں

iii۔ اگر C ایک بند (closed) curve ہے تب $\int_C dz =$

(a) 0 (b) 2π

(c) $2\pi i$ (d) $-2\pi i$

iv۔ $\int_C \frac{dz}{z} =$ ، جہاں C ایک دائرہ (circle) ہے جس کا مرکز O(0,0) اور radius r ہے

(a) 0 (b) 2π

(c) $2\pi i$ (d) $-2\pi i$

v۔ $f(z) = |z|^2$ ------------ ہے

(a) ہر طرف differentiable ہے (b) origin z_0 پر differentiable ہے

(c) کہیں بھی differentiable نہیں (d) x-axis پر differentiable ہے

vi۔ $f(z) = \frac{1}{z(1 - z^2)}$ کے پولس (poles) لکھو۔

vii- z=0 ، $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^3}$ کے لیے ---------- ہے

(a) Essential singularity　　(b) Branch point

(c) Simple pole　　(d) Removable singularity

viii Meromorphic function کی تعریف کرو۔

xi- ایسے نقاط (points) جہاں $f(z)=z^4-z^2$ conformal نہ ہو ------ ہیں۔

(a) $0,\sqrt{2},-\sqrt{2}$　　(b) $0,1,-1$

(c) $0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$　　(d) $0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}$

x- Transformation $w=z^2$ کے تحت $x=a,(a>0)$ کا image -------- ہے

(a) an ellipse　　(b) a circle

(c) a hyperbola　　(d) a parabola

حصہ دوم

2- بتلاؤ کہ $f(z)=xy+iy$ ہر طرف continuous ہے لیکن analytic نہیں ہے۔

3- Analytic function $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ معلوم کرو جبکہ $v(r,\theta)=r^2\cos 2\theta-r\cos\theta+2$ ہے۔

4- $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\sin^6 z}{\left[z-(\pi/6)\right]}dz$ کو اخذ (Evaluate) کرو۔

5- فنکشن $f(z)=5\sin 2z$ کے لیے Cauchy's Theorem کو verify کرو، جہاں C ایسا square ہیں جسکے vertices $1\pm i$ اور $-1\pm i$ ہیں۔

6- تفاعل (function) $\dfrac{(z-2)(z+2)}{(z+1)(z+4)}$ ، $1<|z|<4$ کو لارنٹ کے سلسلے (Laurent's series) میں حاصل کرو۔

7- اگر $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ تو اس کا $z=1,2,3$ پر ریسیڈیو (Residue) معلوم کرو۔

8- Transformation $z=\dfrac{i-w}{i+w}$ کے لیے بتلاؤ کہ w-plane کا positive half جو $v\geq 0$ ، z-plane کے دائرے (circle) $|z|\leq 1$ سے correspond کرتا ہے۔

9- Bilinear تحویل تلاش کریں جو نقطہ $(2,i,-2)$ کو نقطہ $(1,i,-1)$ میں نقش کرتا ہے۔

حصہ سوم

10۔ Analicity کے sufficient condition کو بیان اور ثابت کرو۔

11۔ (i) Harmonic function اور Harmonic conjugate کی تعریف کرو۔ اگر $u = y^3 - 3x^2 y$ ہو تب بتلاؤ کہ u harmonic ہے اور اس کا harmonic conjugate معلوم کرو۔

(ii) اگر $u = e^x \cos y$ analytic function $f(z)$ کا real part ہے تب $f(z)$ معلوم کرو۔

12۔ Taylor's Theorem کو بیان اور ثابت کرو۔

13۔ بتلاؤ کہ $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a\cos\theta}{a+\cos\theta}\,d\theta = 2\pi a\left\{1-\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right\},\ (a>1)$

14۔ (i) $w = \frac{(2+i)z-2}{z+i}$ کے fixed points اور Normal form معلوم کرو۔

(ii) transformation $w = z^2$ کے ذریعہ بتلاؤ کہ z-plane کے circles $(a, c \in \mathbb{R})$ $|z-a| = c$، w-plane کے Limacon سے correspond کرتے ہیں۔

☆ ☆ ☆