Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Mathematics)

II - Semester Examination May - 2015

MM 121 : Real Analysis - II

حقیقی تجزیہ ۔II

1134

Time : 3 hours **Total Marks : 70**

نوٹ : ہر سیکشن سے دو سوالات لازمی طور پر حل کرتے ہوئے جملہ (10) دس سوالات حل کریں۔ تمام سوالات کے مساوی نشانات ہیں۔

(Answer Ten questions by choosing any two from each section. All questions carries equal marks)

(Section - A)

1۔ فرض کرو کہ $\{E_n\}$ شمار پذیر سیٹوں کا دستہ ہے تب ثابت کرو کہ $m^*\left(\bigcup_n E_n\right) \le \sum_n m^*(E_n)$ ۔

Let $\{E_n\}$ be a countable collection of sets. Then prove that $m^*\left(\bigcup_n E_n\right) \le \sum_n m^*(E_n)$.

2۔ لبیگ پیمائش تفاعل کی تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ اگر E ایک قابل پیمائش سٹ ہو تو E^c بھی قابل پیمائش ہوگا۔

Define Lebesgue measure function .Prove that if E is a measurable set, then so is E^c.

3۔ فرض کرو کہ f اور g E پر حقیقی قیمت والے تفاعل ہیں اور c ایک مستقل ہے تب بتلاؤ کہ

(a) $f+g$ (b) $f-g$ (c) f^2 (d) fg E پر قابل پیمائش ہیں۔

Let f and g be measurable real valued functions on E and c be a constant. Then each of the following is measurable on E (a) $f+g$ (b) $f-g$ (c) f^2 (d) fg .

(Section - B)

4۔ اگر E پر $\int_E f = 0$ اور $f(x) \ge 0$ تب ثابت کرو کہ E پر $f = 0$ (a.e) ہوگا۔

Prove that if $\int_E f = 0$ and $f(x) \ge 0$ on E, then $f = 0$ a.e.

5۔ بستہ متدرق قضیہ کو بیان اور ثابت کرو۔ State and prove Bounded Convergence theorem.

6۔ فیچوس کے مفروضہ قضیہ کو بیان اور ثابت کرو۔ State and Prove Fatous Lemma.

(Section - C)

7۔ ثابت کرو کہ بستہ تغیر تفاعل بستہ تفاعل ہوگا لیکن اسکا معکوس درست نہیں۔

Prove that a function of bounded variation is necessarily bounded but not conversely.

P.T.O

8- انحلال قضیہ کو بیان اور ثابت کرو۔ State and prove Decomposition theorem.

9- اگر f $[a,b]$ پر مطلق تسلسل تفاعل ہو تب ثابت کرو کہ f $[a,b]$ پر بستہ تغیر ہوگا۔

If f is absolutely continuous on $[a,b]$, then prove that f is of bounded variation on $[a,b]$.

(Section - D)

10- فرض کرو کہ A، B دو قابل پیائش سٹس ہیں اور ν علامتی پیائش اس طرح ہے کہ $A \subset B$ اور $|\nu(B)| \langle \infty$ تب بتلاؤ کہ $|\nu(A)| \langle \infty$ ۔

Let A and B be two measurable sets and ν a signed measure $s.t$ $A \subset B$ and $|\nu(B)| \langle \infty$ .Then show that $|\nu(A)| \langle \infty$.

11- اگر λ اور μ مکمل σ- متناہی پیائش اس طرح ہیں کہ $\mu \langle\langle \lambda$ اور ν مکمل σ- متناہی پیائش ہے جبکہ $\nu \langle\langle \mu$، تب ثابت کرو کہ $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\lambda}$ ۔

If λ and μ are totally $\sigma-$finite measures such that $\mu \langle\langle \lambda,$ and if ν is totally $\sigma-$ finite measure such that $\nu \langle\langle \mu,$ then prove that $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\lambda}$.

12. مثبت سٹ کی تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ X کے مثبت تحت سٹوں کا شمار پذیر اتحاد مثبت ہوگا۔

Define a positive set. Prove that union of a countable collection of positive sets in X is positive.

(Section - E)

13- اگر E_1 اور E_2 قابل پیائش ہوں تو بتلاؤ کہ $E_1 \cup E_2$ بھی قابل پیائش ہوگا۔

If E_1 and E_2 are measureable sets, then so is $E_1 \cup E_2$.

14- بتلاؤ کہ تفاعل $f:[0,\infty[\to R$ جس کی تعریف اس طرح کی گئی ہے کہ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$ $[0,\infty[$ پر لبیگ تکمل پذیر نہیں ہے۔

Show that the function $f:[0,\infty[\to R$ defined by $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$ is not Lebesgue integrable over $[0,\infty[$.

contd..... on page 3

15۔ اگر $f, g \in L^p(a,b)$ جبکہ $p > 1$ ہو تب ثابت کرو کہ $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ ۔

If $f, g \in L^p(a,b)$ where $p > 1$ then prove that $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

16۔ اگر $E_i \in B,\ \mu E_1 < \infty$ اور $E_i \supset E_{i+1}$، ثابت کرو کہ $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu E_n$ ۔

If $E_i \in B,\ \mu E_1 < \infty$ and $E_i \supset E_{i+1}$, then prove that $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu E_n$.

☆ ☆ ☆

Final