M.Sc./3S/P-I/Nov-Dec-2014 C/B copy

Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Mathematics)

III - Semester Examination - November / December - 2014

Paper I. MM 231 : Functional Analysis

پہلا پرچہ : تفاعلی تجزیہ

Total Marks : 70 **Time : 3 hours**

373

نوٹ: ہر سیکشن سے دو سوالات لازمی طور پر حل کرتے ہوئے جملہ (10) دس سوالات حل کریں۔ تمام سوالات کے مساوی نشانات ہیں۔

(Answer ten questions by choosing any two from each section. All questions carries equal marks)

(I 1۔ l_p^n فضاء میں ہولڈر کی نامساوات کو بیان اور ثابت کرو۔

(State and Prove Holder's in equality in l_p^n space.)

2۔ ثابت کرو کہ l_p^n فضاء ایک باناک فضاء ہے۔

(Prove that the space l_p^n is a Banach space)

3۔ اگر N, N' سٹ F پر کوئی دو نارمڈ خطی فضائیں ہوں اور اگر $T : N \to N'$ ایک خطی تحویل ہو تب ثابت کرو کہ T مسلسل ہے اگر اور صرف اگر T محدود ہے۔

(If N, N' are any two normed linear spaces over F and if $T : N \to N'$ is a linear transformation then prove that T is continuous $\Leftrightarrow$ T is bounded.)

(II 4۔ اگر X ایک IPS ہو اور $A \subseteq X$ تب بتلاؤ کہ $A^{\perp}$ ، X کی بند تحت فضاء ہے۔

(If X is an inner product space and $A \subseteq X$ then prove that $A^{\perp}$ is a closed subspace of X.)

5۔ اگر کسی ہلبرٹ فضاء H میں M ایک بند خطی تحت فضاء ہو تو ثابت کرو کہ $H = M \oplus M^{\perp}$

(If M is a closed subspace of a Hilbert space H then prove that $H = M \oplus M^{\perp}$.)

6۔ بیسل کی نامساوات کو بیان اور ثابت کرو۔

(State and prove Bessel's inequality.)

(III 7۔ ہان باناک مسئلہ کو بیان کرو۔ اگر N ایک نارمڈ خطی فضاء ہو اور $x_0 \neq 0 \in N$ تب ایک تفاعلی $f_0 \in N^*$ اس طرح وجود رکھتی ہے کہ $f_o(x_o) = \|x_o\|$ اور $\|f_o\| = 1$ ۔

(State Hahn Banach theorem. If N is a normed linear space $x_0 \neq 0 \in N$ then $\exists$ a function $f_0 \in N^* \ni f_o(x_o) = \|x_o\|$ and $\|f_o\| = 1$)

P.T.O

8۔ ثابت کرو کہ ایک خطی عامل T بند ہوگا $\Leftrightarrow$ اسکا گراف ایک بند تحت فضاء ہے۔

(Prove that a linear operator T is closed $\Leftrightarrow$ its graph is a closed subspace.)

9۔ بند گراف مسئلہ کو بیان اور ثابت کرو۔ (State and prove closed graph theorem.)

(IV

10۔ کسی contraction نقش کی تعریف کرو۔ باناک کے contraction اصول کو بیان اور ثابت کرو۔

(Define contraction mapping. Stae and prove Banach Contraction principle.)

11۔ اگر B ایک باناک فضاء ہے اور $T : B \to B$ اس طرح کہ T^r ایک contraction ہے کسی صحیح عدد $r > 0$ کیلئے تب T ایک یکتا مقررہ نقطہ رکھتا ہے۔

(If B is a Banach space and $T : B \to B$ such that T^r is a contraction for some integer $r > 0$ then T has aunique fixed point.)

12۔ اگر $T : X \to X$ ایک contraction ہو تب ثابت کرو کہ T یکساں طور پر X پر مسلسل ہے۔

(If $T : X \to X$ is a contraction, then prove that T is uniformly continuous on X.)

(V

13۔ ثابت کرو X کے تمام محدود مسلسل میزانی قیمتی تفاعلات کی فضاء C(X) ایک باناک فضاء تحت $\|f\| = Sup\{|f(x)| : x \in X\}$ کے تحت ہے۔

(Prove that the space C(X) of all bounded continuous scalar valued function defined on X is a Banach space under $\|f\| = Sup\{|f(x)| : x \in X\}$.)

14۔ فرض کرو کہ کسی ہلبرٹ فضاء H کا اسی پر T ایک محدود خطی عامل ہے اور T^* اسکا adjoint ہے تب ثابت کرو کہ

(i) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$ (ii) $(\lambda T)^* \bar{\lambda} T^*$ (iii) $(T_1 T_2)^* = T_2^* + T_1^*$ (iv) $T^{**} = T$

(Let T be a bounded linear operator on a Hilbert Space H into itself and T* its adjoint then prove that

(i) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$ (ii) $(\lambda T)^* \bar{\lambda} T^*$ (iii) $(T_1 T_2)^* = T_2^* + T_1^*$ (iv) $T^{**} = T$

15۔ اگر کسی نارمڈ خطی فضاء N کی بند تحت فضاء M ہو اور $x_0 \notin M$ اور اگر $d = d(x_0, M)$ تب ثابت کرو کہ ایک تفاعلی $f_0 \in N^*$ اس طرح وجود رکھتی ہے کہ تمام $x \in M$ کیلئے $f_0(x) = 0$ اور $\|f\| = \frac{1}{d}$

(Let M is a closed linear subspace of a normed linear space N and $x_0 \notin M$.
If $d = d(x_0, M)$ then prove that $\exists$ a functional f_0 in N^* such that $f_0(x) = 0 \;\; \forall x \in M$ and $\|f\| = \frac{1}{d}$.)

16۔ (i) آیا نقش $T(x) = x + a$ جہاں پر a مقررہ ہے ایک مقررہ نقطہ رکھتا ہے۔

(ii) اگر $T : R \to R$ اس طرح معرف ہے کہ $T(x) = x^3$ تو T کے مقررہ نقطے معلوم کرو۔

(iii) اگر $T : R^2 \to R$ اس طرح معرف ہے کہ $T(x_1, x_2) = x_1$ ، T کے مقررہ نقطے معلوم کرو۔

((i) Does $T(x) = x + a$ (a fixed) have a fixed point.

(ii) If اگر $T : R \to R$ is defined b $T(x) = x^3$, find the fixed points of T.

(iii) If $T : R^2 \to R$ is defined by $T(x_1, x_2) = x_1$, what are the fixed points of T.

☆☆☆