Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Mathematics)

III - Semester Examination November - December - 2014

Paper III. MM233 : Advanced Algebra

تیسرا پرچہ : اعلیٰ الجبرا

Total Marks : 70 **Time : 3 hours**

نوٹ: ہر سیکشن سے دو سوالات لازمی طور پر حل کرتے ہوئے جملہ (10) دس سوالات حل کریں۔ تمام سوالات کے مساوی نشانات ہیں۔

(Answer ten questions by choosing any two from each section. All questions carries equal marks)

I)

1۔ Gauss کے مفروضہ قضیہ کو بیان اور ثابت کرو۔

(State and prove Gauss lemma.)

2۔ فرض کرو کہ $F \subseteq E \subseteq K$ میدان ہیں۔ اگر $[K:E]<\infty$ اور $[E:F]<\infty$ ہوں تو ثابت کرو کہ $[K:F]<\infty$ ہے اور $[K:F]=[K:E][E:F]$۔

(Let $F \subseteq E \subseteq K$ be fields. If $[K:E]<\infty$ and $[E:F]<\infty$ then prove that $[K:F]<\infty$ and $[K:F]=[K:E][E:F]$.)

3۔ (i) $\sqrt{2}+5$ اور (ii) $3\sqrt{2}+5$ کے اقل ترین کثیر رکنیوں کو معلوم کرو۔

(Determine the minimal polynomials of (i) $\sqrt{2}+5$ (ii) $3\sqrt{2}+5$.)

II)

4۔ اگر میدان F پر K کثیر رکن $f(x)\in F(x)$ کا ایک منقسم میدان ہے اور E، $f(x)$ کا کوئی اور منقسم میدان ہو تو ثابت کرو کہ ایک ایسا (isomorphism) یک مارفیت $\sigma : E \to K$ وجود رکھتا ہے جو F پر متماثل ہے۔

(If K is a splitting field of the polynomial $f(x)\in F(x)$ over the field F and if E is another splitting field *f(x)* over F then prove that there is an isomorphism $\sigma : E \to K$ which is an identity on F.)

5۔ ثابت کرو کہ $x^3-2\in Q[x]$ کے منقسم میدان کی وسعت کا درجہ 6 ہے۔

(Prove that the degree of the extension of the splitting field of $x^3-2\in Q[x]$ is 6.)

6۔ ثابت کرو کہ درجہ دو کی کوئی بھی وسعت عمود وسعت ہے۔

(Prove that any extension of degree 2 is normal.)

III)

7۔ اگر E میدان F کا متناہی وسعت ہے تو ثابت کرو $|G(E/F)|\le[E:F]$ ہے۔

(If E is a finite extension of a field F then prove that $|G(E/F)|\le[E:F]$.)

8۔ بتلاؤ کہ E، میدان F پر عمودی وسعت ہے $\Leftrightarrow F$، $G(E/F)$ کا ایک مقررہ میدان ہے۔

(Show that E is a normal extension of a field $F \Leftrightarrow F$ is the fixed field of $G(E/F)$.)

9۔ ثابت کرو کہ گروپ $G(Q(\alpha)/Q)$ رتبہ '4' والی سائیکلی گروپ سے یک مارفی ہے جہاں $\alpha^5 = 1$ اور $\alpha \neq 1$ ہے۔

(Prove that the group $G(Q(\alpha)/Q)$ where $\alpha^5 = 1$ and $\alpha \neq 1$ is isomorphic to the cyclic group of order 4.)

IV۔ 10۔ فرض کرو کہ F میدان ہے اور 'U' ضربی گروپ F*=F-{0} کا متناہی تحت گروپ ہے۔ ثابت کرو کہ 'U' سائیکلی گروپ ہے۔

(Let F be a field and U be a finite subgroup of the multiplicative group F*=F-{0}.) Then prove that U is cyclic.

11۔ اگر 'E' $x^n - a \in F[x]$ کا منقسم میدان ہے تب ثابت کرو کہ G(E/F) ایک حل پذیر گروپ ہے۔

(Let E be the splitting field of $x^n - a \in F[x]$. Then prove that G(E/F) is a solvable group.)

12. Ruler اور Compass کے استعمال سے ثابت کرو کہ ایک زاویہ وجود رکھتا ہے جسکے تین برابر حصے نہیں ہو سکتے۔

(Prove that there exists an angle that cannot be trisected by using ruler and compass.)

(V

13۔ Eisentein's کی کسوٹی کو بیان اور ثابت کرو۔

(State and prove Eisenstein's criteria.)

14۔ مفرد میدان کی تعریف کرتے ہوئے ثابت کرو کہ میدان F کا مفرد میدان Q یا $Z/(p)$ سے یک مارفی ہوگا جہاں 'p' ایک مفرد عدد ہے۔

(Define a prime field and prove that the prime field of a field F is either isomorphic to Q or to $Z/(p)$, p prime.)

15۔ ثابت کرو کہ $x^3 - 2 \in Q[x]$ کا Galois گروپ مثلث کے تشاکلوں کا گروپ ہے۔

(Prove that the Galois group of $x^3 - 2 \in Q[x]$ is the group of symmetrics of the triangle.)

16۔ ثابت کرو کہ نصف قطر '1' والے دائرے کو مساوی رقبہ رکھنے والے مربع میں تبدیل کرنا ناممکن ہے۔

(Prove that it is impossible to construct a square equal in area to the area of a circle of radius 1.)

☆☆☆