M.Sc./III-Sem/P-V/Nov/Dec-2014

Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Mathematics)

III - Semester Examination November / December - 2014

Paper V : MME 35 (C): Finite Difference Methods

پانچواں پرچہ : محدود فرقی طریقے

Total Marks : 70 **Time : 3 hours**

نوٹ: ہر سیکشن سے دو سوالات لازمی طور پر حل کرتے ہوئے جملہ (10) دس سوالات حل کریں۔ تمام سوالات کے مساوی نشانات ہیں۔

(Answer ten questions by choosing any two from each section. All questions carries equal marks)

I) 1۔ رشتہ $y^2u_{xx}-2xyu_{xy}+x^2u_{yy}=\frac{y^2}{x}u_x+\frac{x^2}{y}u_y$ کے Characteristics معلوم کرو۔

377

(Find the characteristics of the relation $y^2u_{xx}-2xyu_{xy}+x^2u_{yy}=\frac{y^2}{x}u_x+\frac{x^2}{y}u_y$.)

2۔ Consistence، Truncation error، Statbility، Convergence اور Lax-Richtmyer مسئلہ کی تعریف کرو۔

(Define Consistence, Truncation error, stability, convergence and Lax-Richtmyer theorem.)

3۔ مساوات $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ کا Truncation error معلوم کرو۔

(Find the Truncation error of $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.)

II) 4۔ بتلاؤ کہ ذیل میں دی گئی Crank-Nicolson اسکیم کو ثابت کرو کہ یہ غیر شرطیہ طور پر Stable ہے۔

(Show that the Cranck-Nicolson scheme

$U_m^n+\frac{\lambda}{2}\left(U_{m+1}^n-2U_m^n+U_{m-1}^n\right)=U_m^{n+1}-\frac{\lambda}{2}\left(U_{m+1}^{n+1}-2U_m^{n+1}+U_{m-1}^{n+1}\right)$ is unconditionally stable.)

5۔ ذیل کے ابتدائی سرحدی مسئلے کو Laasonen method کو استعمال کر کے حل کرو۔

(Solve the initial boundary value problem

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0)=\sin\pi x\ ;\ 0\le x\le 1$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0$$

Using Laasonen method given by $U_m^n=-\lambda\left(U_{m+1}^{n+1}+U_{m-1}^{n+1}\right)+(1+2\lambda)U_m^{n+1}$ with $h=\frac{1}{3},\ k=\frac{1}{36},\ \lambda=\frac{1}{4}$ integrate upto two time steps.)

6۔ مساوات $u_t = u_{xx}$ کو رچرڈسن کے طریقے کو استعمال کر کے فرقی اسکیم لکھو۔

(Write the difference scheme for $u_t = u_{xx}$ using Richardson's method.)

(III 7۔ ثابت کرو کہ مساوات $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ کے truncation error کا رتبہ $(k^2 + h^2)$ ہے

(Show that the order of truncation error of $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ is $(k^2 + h^2)$.)

8۔ ذیل کے ابتدائی سرحدی مسئلہ $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ کو ذیل میں دیے گئے ابتدائی شرائط اور سرحدی شرائط اور اسکیم کو استعمال کر کے $h = \frac{1}{4}$ اور $r = \frac{3}{4}$ لے کر ایک وقتی step کیلئے تکمل کرو۔

(Find the solution of the initial boundary value problem $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ subject to the initial conditions

$u(x,0) = \sin \pi x \;\; ; \;\; 0 \le x \le 1$

$u_t(x,0) = 0 \;\; ; \;\; 0 \le x \le 1$

and the boundary conditions $u(0,t) = 0 \;;\; u(1,t) = 0;\; t > 0$, using explicit scheme given by $U_m^{n+1} = 2(1-r^2)U_m^n + r^2\left(U_{m+1}^n + U_{m-1}^n\right) - U_m^{n-1}$ with perform integration for one time step.)

9۔ تفرقی مساوات $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ کو $U_m^{n+1} = (1+r)U_m^n - rU_{m+1}^n$ سے تقرب کیا گیا۔ اس فرقی اسکیم کی Stability کا امتحان کرو۔

(The differential equation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ is approximated by $U_m^{n+1} = (1+r)U_m^n - rU_{m+1}^n$ Examine the stability of difference scheme.)

(IV

10۔ مساوات $u(x,y) = e^x \cos y$، $0 < x, y < 1$ سے حاصل شدہ Dirichlet boundary conditions کے ذریعے سرحدی قیمتی مسئلے $u_{xx} + u_{yy} - 5u(u_x - u_y) = -5e^{2x}\cos y(\cos y + \sin y)$ کو حل کرو۔ $h = \frac{1}{2}$ کے ساتھ دوسرے رتبے کا طریقہ استعمال کرو۔

(Find the solution of B.V.P

$u_{xx} + u_{yy} - 5u(u_x - u_y) = -5e^{2x}\cos y(\cos y + \sin y), 0 < x, y < 1$ with Dirichlet boundary conditions obtained from the exact solution $u(x,y) = e^x \cos y$. Use the second order method with $h = \frac{1}{2}$

contd. on P3

11۔ ذیل میں دیئے گئے سرحدی قیمتی مسئلہ کو دی گئی شرائط کے تحت حل کرو۔

(Solve the boundary value problem $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+u_{zz}=-1,\ 0\le r<1,\ \ 1<z<1,\ u=0$

on the boundary.Using the five point scheme given by

$$-2\left(2+\frac{1}{s^2}\right)U_{l,m}+2\left(U_{l+1,m}+U_{l-1,m}\right)+\frac{1}{s^2}\left(U_{l,m-1}+U_{l,m+1}\right)=h^2 f_{l,m}$$ where

$s=\frac{k}{h}, k=h=\frac{1}{2}$.)

.12 نچلی رتبہ کی Dirichlet کی فرقی اسکیم Poison مساوات کیلئے حاصل کرو۔

(Determine the lower order difference scheme for Dirichlet problem for Poission equation.)

(V 13۔ Routh-Hurwitz کی کسوٹی کو سمجھاؤ۔

(Explain Routh-Hurwitz criteria.)

14۔ دوابعادی مکافی مساوات کیلئے فرقی اسکیم Peaceman-Rachford کے ADI طریقہ کو استعمال کرکے لکھو۔

(Write the difference scheme for two dimensional parabolic equation by using Peaceman-Rachford ADI method.)

15۔ ذیل کے ابتدائی قیمتی مسئلہ کو دی گئی شرائط کے تحت حل کرو۔

(Solve the initial-boundary value problem.

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}$$
$$u(x,y,0)=\sin\pi x\sin\pi y$$
$$u_t(x,y,0)=0\ ,\ 0\le x,y\le 1$$
$$u(x,y,t)=0;\ \textit{on the boundary}\ t\ge 0$$

Using the D'yakonov split form with $\theta=\frac{1}{2}, h=r=\frac{1}{3}$ perform the integration for one time step.)

16۔ اوپری رتبہ کی Dirichlet کی فرقی اسکیم Poission مساوات کیلئے حاصل کرو۔

(Determine the higher order difference scheme for Dirichelt problem for Poission equation.)

☆☆☆