

Maulana Azad National Urdu University
M.Sc. (Maths) III Semester Examination - December - 2018

MSMM301CCT : Functional Analysis

پرچہ : تقاضی تجزیہ

Time : 3 hrs

Marks : 70

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارہ ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔
(10 x 1 = 10 Marks)

2. حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دو سو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔
(5 x 6 = 30 Marks)

3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو (500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔
(3 x 10 = 30 Marks)

حصہ اول

سوال نمبر : 1

- (i) 'Q' کا Completion ہے۔
- (ii) ایک Normed Space پر Functional کی تعریف کرو۔
- (iii) 'Hilbert Space' H میں $\{0\}^\perp = \dots$ ہے۔
- (iv) \mathbb{C}^3 IPVS کا Inner Product ہے۔
- (v) Identity Operator مثبت (Positive) ہے۔
- (vi) Linear Operator کے Graph کی تعریف کرو۔
- (vii) Operator $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ جس کی تعریف $T(x) = x^2$ ہے۔ اس کے Fixed Points ہیں۔
- (viii) 'Contraction Map' Uniformly Continuous ہوگا۔
- (ix) Self Adjoint Operator $T: H \rightarrow H$ ہوگا اگر.....
- (x) Normal Operator کی تعریف کرو۔

حصہ دوم

(2) Normed Space کی تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ ہر Normed Space ایک Metric Space ہوگا۔

(3) اگر X ایک Normed Space اس طرح ہے کہ $F(w) = 0 \forall F \in X^*$ تب بتلاؤ کہ $w=0$ ہوگا۔

(4) Hilbert Space کے ایک سٹ S کے Orthogonal Complement کی تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ Hilbert Space 'H کے ہر تحت

سٹ S کے لیے $H' S^\perp$ کی تحت فضا (Sub Space) ہے۔

(5) "Bessels Inequality" کو بیان اور ثابت کرو۔

(6) اگر N ایک Normed Linear Space ہے اور $x_0 \neq \bar{0} \in N$ تب ثابت کرو کہ $f_0 \in N^*$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$\|f_0\| = 1 \text{ اور } f_0(x_0) = \|x_0\|$$

(7) اگر 'T' Normal Operator ہے تب بتلاؤ کہ $\|T^2\| = \|T\|^2$ ہے۔

(8) Contraction Map کی تعریف کرو۔ ایک مثال دو۔

(9) مقررہ نقطہ (Fixed Point) کی تعریف کرو۔ $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, T(x) = x^3 \forall x \in \mathbb{R}$ اور $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Fixed Points کے $T(x_1, x_2) = x_1$ معلوم کرو۔

حصہ سوم

(10) ثابت کرو کہ l_2^n Space جس میں $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in l_2^n$ کے لیے $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$ ہو ایک Banach Space ہے۔

(11) Hilbert Space کی تعریف کرو۔ اگر 'M' Hilbert Space 'H کی ایک بند تحت فضا (Closed Subspace) ہے تب ثابت کرو کہ

$$H = M \oplus M^\perp$$

(12) Adjoint Operation $B(H)$ کے لیے حسب ذیل کو ثابت کرو۔

$$\|T^*\| = \|T\| \quad \text{(ii)} \quad (T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^* \quad \text{(i)}$$

$$\|T^* T\| = \|T\|^2 \quad \text{(iv)} \quad T^{**} = T \quad \text{(iii)}$$

(13) Open Mapping Theorem کو بیان اور ثابت کرو۔

(14) Banach Contraction Principle کو بیان اور ثابت کرو۔