Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Maths) III Semester Examination - December - 2018

MSMM302CCT : Advanced Algebra

پرچہ : ایڈوانسڈ الجبرا

Time : 3 hrs | Marks : 70

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات / خالی جگہ پُر کرنا / مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو (500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال نمبر : 1

(i) کیا Polynomial $5x^4 + 7x^3 + 14x^2 - 7x + 35$ $\mathbb{Q}$ پر Irreducible ہے۔ (صحیح/غلط)

(ii) $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{5}} \in \mathbb{C}$، $\mathbb{Q}$ پر Algebraic ہے۔ (صحیح/غلط)

(iii) Kroneckers Theorem کو بیان کرو۔ واضح کریں $f(x) = 1 + x^2 \in \mathbb{R}[x]$ کے لیے۔

(iv) تعریف کرو (a) Algebraically closed field K، (b) ایک Field $\overline{F}$ کا Algebriac closure۔ ایک مثال دو۔

(v) کیا $\mathbb{R}$، $\mathbb{Q}$ کا Normal Extension ہے۔ (صحیح/غلط) $\overline{\mathbb{Q}}$ ، $\mathbb{Q}$ کا کیا ہے۔

(vi) F پر Separable Extension E کی تعریف کرو ایک مثال دو۔

(vii) E/F Galois Extension اور اس کے Galois Group کی تعریف کرو اور ایک مثال دو۔

(viii) اگر E، 7^9 Elements کا Finite Field ہے تب E کے Automorphism Group اور Generators کیا ہونگے؟

(ix) اگر $f(x)$ 'Characteristics Zero' والے Field پر Irreducible Polynomial ہو تو کیا اس کے ریشہ (roots) Distinct ہوتے ہیں۔ (صحیح/غلط)

(x) Cyclic Extension کی تعریف کرو اور دو مثالیں دو۔

حصہ دوم

(2) $\mathbb{Q}$ پر $p(x)$ Minimal Polynomial کی تعریف کرو۔ $\alpha = \sqrt[3]{1+i\sqrt{7}} \in \mathbb{C}$ کا Minimal Polynomial $\mathbb{Q}$ پر
معلوم کرو۔ Adjunction Field $\mathbb{Q}(\alpha)$ کو بیان کرو۔ $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ کی قدر کیا ہوگی؟

(3) ایک مثال کے ذریعہ (i) Finite Extension (ii) Algebraic Extension کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ ہر
Finite Extension ، Algebraic ہوتا ہے۔

(4) بتلاؤ کہ Complex Numbers کا میدان(Field) $\mathbb{C}$ Algebraically Closed ہوتا ہے۔(i) $\mathbb{Q}$ اور (ii) $\mathbb{R}$
کے Algebaic Closures لکھیں۔ دو Real Algebraic اور دو Transcendental Numbers لکھو۔

(5) بتلاؤ کہ ہر Degree '2' کا Extension ، Normal Extension ہوگا۔

(6) $f(x) = x^5 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ کے Splitting Field معلوم کرو۔ $[K:\mathbb{Q}]$ کیا ہے۔کیا K ، $\mathbb{Q}$ کا Galois Extension ہے؟

(7) (a) 49 عناصر(Elements) اور (b) 3^4 عناصر(Elements) والے میدان E کو Construct کریں۔E کے
Automorphism Groups اور اس کے Generators کو لکھیں۔

(8) $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) = E$ کا Galois Group $\mathbb{Q}$ پر معلوم کرو۔کیا $E/\mathbb{Q}$ Galois ہوگا۔

(9) Ruler اور Compass کے استعمال سے بتلاؤ کہ زاویہ (Angle) $\alpha = 54^0$ کے تین برابر حصے ہوسکتے ہیں۔

یا (OR)

Ruler اور Compass کے طریقے سے 15-gon Construct ہوسکتا ہے یا نہیں وضاحت کرو۔

حصہ سوم

(10) (a) بتلاؤ کہ $\sqrt{2}$ اور $\sqrt{7}$ $\mathbb{Q}$ پر Algebraic ہیں۔ (i) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ (iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{14})$
(iv) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{7})$ کے Adjunction Fields کے elements کو بیان کرو۔

(b) $\mathbb{Q}$ پر (i) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ (iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{14})$ (iv) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{7})$
(v) $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{7})$ کے Degrees of Extension معلوم کرو اور $\mathbb{Q}$ پر $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{7})$ کی
basis معلوم کرو۔

(11) $\mathbb{Q}$ پر $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ کی Splitting Field K معلوم کرو۔کیا K، $\mathbb{Q}$ کا Galois Extension ہے؟
اگر ہاں ہوتو اُس کا Galois Group معلوم کرو۔

(12) Galois Theory کے بنیادی نظریہ (Main Theorem) کو بیان (State) کرو۔ $\mathbb{Q}$ پر $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$ کے
1-1 Correspondence کو بیان کرو۔

(13) فرض کرو کہ اگر $f(x)=x^8-1\in\mathbb{Q}[x]$ ہے۔

(i) تمام Primitive 8th roots of unity معلوم کرو۔

(ii) Cyclotomic Polynomial $\Phi_8(x)\in\mathbb{Z}[x]$ لکھیے۔

(iii) $\Phi_8(x)\in\mathbb{Z}[x]$ کے Splitting Field K معلوم کرو۔

(iv) بتلاؤ کہ $K/\mathbb{Q}$ Galois ہے۔ $[K:\mathbb{Q}]$ کیا ہے۔

(v) Galois Group $G(K/\mathbb{Q})$ ، $\mathbb{Z}_8$ کی مدد سے معلوم کرو۔

(14) بتلاؤ کہ Quintic Polynomial $f(x)=x^5-8x+6\in\mathbb{Q}[x]$ Radicals کے طریقے سے Solvable نہیں ہے۔
اس کے ثبوت کے استعمال کے Results لکھو۔

☆☆☆