Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Mathematics)

III - Semester Examination - November / December - 2015

MM231 : Functional Analysis

تفاعلی تجزیہ

Total Marks : 70 **Time : 3 hours**

980

نوٹ: ہر سیکشن سے دو سوالات لازمی طور پر حل کرتے ہوئے جملہ (10) دس سوالات حل کریں۔ تمام سوالات کے مساوی نشانات ہیں۔

(Answer ten questions by choosing any two from each section. All questions carry equal marks.)

حصہ (A)

1۔ l_p^n فضاء میں منکوسکی نامساوات کو بیان اور ثابت کرو۔

(State and prove Minkowski Inequality in the space l_p^n.)

2۔ بتلاؤ کہ l_∞^n ایک بیناک فضاء ہے۔

(Show that l_∞^n forms a Banach Space)

3۔ فرض کرو کہ 'M' نارمڈ فضاء N کی بند خطی تحت فضاء ہے۔ تب ثابت کرو کہ فضاء $N / M = \{M + x / x \in N\}$ نارمڈ خطی فضاء ہے
جبکہ دیا گیا ہے کہ $\|M + x\| = \inf\{\|m + x\| / m \in M\}$۔

(Let M be a closed linear subspace of normed linear space N. Then the space $N / M = \{M + x / x \in N\}$ forms a normed linear space under $\|M + x\| = \inf\{\|m + x\| / m \in M\}$.)

حصہ (B)

4۔ Bessel's کی نامساوات کو بیان اور ثابت کرو۔

(State and Prove Bessels Inequality).

5۔ ثابت کرو کہ ہلبرٹ فضاء H پر عامل T خود اڈجائنٹ ہوگا اگر اور صرف اگر <Tx,x> $\forall x \in H$ حقیقی عدد ہے۔

(Prove that an operator T on a Hilbent space H is self adjoint if and only if <Tx,x> is real $\forall x \in H$).

6۔ اگر N_1، N_2 ہلبرٹ فضاء H پر کوئی عمودی عامل ہیں جو ایک دوسرے کے اڈجائنٹ سے تقلیبی قانون پورا کرتے ہوں تب ثابت کرو کہ
N_1N_2، $N_1 + N_2$ بھی عمودی عامل ہیں۔

(If N_1, N_2 and are any two normal operators on Hilbert space H which commutes with the adjoint of the other then prove that $N_1 + N_2$, N_1N_2 are also normal.)

P.T.O.

حصہ (C)

7۔ ہان باناک مسئلہ کو بیان کرو۔اگر Nایک نارمڈ خطی فضاء ہو اور $x_0 \neq 0 \in N$ تب ایک تفاعلی $f_0 \in N^*$ اس طرح وجود رکھتی ہے کہ $f_o(x_o) = \|x_o\|$ اور $\|f_o\| = 1$۔

(State Hahn Banach theorem. If N is a normed linear space $x_0 \neq 0 \in N$ then there exists a functional $f_0 \in N^* \ni f_o(x_o) = \|x_o\|$ and $\|f_o\| = 1$).

8۔ اگر M نارمڈ فضاء N کی ایک خطی بند فضاء ہے اور $x_0 \notin M$ اور $d = d(x_0, M)$ تب ثابت کرو کہ N* میں ایک f_0 اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $f_0(M) = 0,\ f_0(x_0) = 1, \|f_0\| = \frac{1}{d}$۔

(If M is a closed linear subspace of a normed linear space and $x_0 \notin M$ and if $d = d(x_0, M)$ then prove that $\exists f_0 \in N^* \ni f_0(M) = 0,\ f_0(x_0) = 1, \|f_0\| = \frac{1}{d}$).

9۔ بند خطی تحویل کی تعریف کرو۔ثابت کرو کہ T بند خطی تحویل ہوگا۔ ⇔ اسکا گراف ایک بند تحت فضاء ہے۔

(Define a closed linear transformation. Prove that a linear operator T is closed ⇔ its graph is a closed subspace.)

حصہ (D)

10۔ کسی contraction نقش کی تعریف کرو۔ثابت کرو کہ X پر ہر T contraction یکساں طور پر مسلسل ہے۔

(Define a contraction mapping. Prove that every contraction T on X is uniformly continous.)

11۔ بیناک کے انقباضی اصول کو بیان اور ثابت کرو۔

(State and prove Banach Contraction principle.)

12۔ فرض کرو کہ $X = \{x \in R \,/\, x \geq 1\} \subset R$ اور $T : X \to X$ کی اسطرح تعریف کی گئی ہے کہ $Tx = \frac{x}{2} + x^{-1}$۔ تب دکھلاؤ کہ Tایک انقباضی نقش ہے۔

(Let $X = \{x \in R \,/\, x \geq 1\} \subset R$ and $T : X \to X$ be defined by $Tx = \frac{x}{2} + x^{-1}$. Show that T is a contraction mapping).

حصہ (E)

13۔ اگر N_1 اور N_2 دو نارمڈ خطی فضائیں ہوں اور $T : N_1 \to N_2$ ایک خطی تحویل ہے تب بیانات (i) T N_1 پر مسلسل ہے (ii) T محدود ہے ہم اثر ہیں۔

(If N_1 and N_2 are any two normed linear spaces and if $T : N_1 \to N_2$ is a linear transformation then (i)T is continuous on N_1 (ii) T is bounded are equivalent).

14۔ اگر 'T' ہلبرٹ فضاء H پر عامل ہے تب بیانات (i) $T^* T = I$ (ii) $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ (iii) $\|Tx\| = \|x\| \ \forall x \in H$ ہم اثر ہیں۔

(If T is an operator on a Hilbert space H then (i) $T^* T = I$ (ii) $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ and (iii) $\|Tx\| = \|x\| \ \forall x \in H$ are equivalent).

15۔ بند گراف مسئلہ کو بیان اور ثابت کرو۔

(State and prove closed graph theorem.)

16۔ مقررہ نقطہ کی تعریف کرو۔

(i) اگر $T : R \to R$ اس طرح معرف ہے کہ $T(x) = x^3$ تو T کے مقررہ نقطے معلوم کرو۔

(ii) اگر $T : R^2 \to R$ اس طرح معرف ہے کہ $T(x_1, x_2) = x_1$ تب T کے مقررہ نقطے معلوم کرو۔

(Define a fixed point.

(i) If $T : R \to R$ is defined by $T(x) = x^3$ then find the fixed points of T.

(ii) If $T : R^2 \to R$ is defined by $T(x_1, x_2) = x_1$ then find the fixed points of T).

☆☆☆