Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Mathematics)

III - Semester Examination November / December - 2015

Paper III. MM233 : Advanced Algebra

تیسرا پرچہ : اعلیٰ الجبرا

986

Total Marks : 70 **Time : 3 hours**

نوٹ: ہر سیکشن سے دو سوالات لازمی طور پر حل کرتے ہوئے جملہ (10) دس سوالات حل کریں۔ تمام سوالات کے مساوی نشانات ہیں۔

(Answer ten questions by choosing any two from each section. All questions carries equal marks)

(A - حصہ)

1- فرض کرو کہ $F \subseteq E \subseteq K$ میدان ہیں۔ اگر $[K:E] < \infty$ اور $[E:F] < \infty$ ہوں تو ثابت کرو کہ $[K:F] < \infty$ ہے اور $[K:F] = [K:E][E:F]$۔

(Let $F \subseteq E \subseteq K$ be fields. If $[K:E] < \infty$ and $[E:F] < \infty$ then prove that $[K:F] < \infty$ and $[K:F] = [K:E][E:F]$.)

2- اقل ترین کثیر رکنی کی تعریف کرو۔ Q پر (i) $\sqrt{2}+5$ (ii) $3\sqrt{2}+5$ اور (iii) $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ کے اقل ترین کثیر رکنیوں کو معلوم کرو۔

(Define a minimal polynomial. Find the minimal polynomials of (i) $\sqrt{2}+5$ (ii) $3\sqrt{2}+5$ and (iii) $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ over Q.)

3- آئزنسٹائن کسوٹی کو بیان اور ثابت کرو۔

(State and Prove Eisenstein Criteria.)

(B - حصہ)

4- ایک کثیر رکنی کے منقسم میدان کی تعریف کرو۔ ایک مثال دو۔

(Define splitting field of a polynomial. Give an example.)

5- جداپذیر وسعت اور غیر جداپذیر وسعت کی تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ ایک میدان F پر جبکہ Char F=P ہے کوئی ناقابل تحویل کثیر رکنی غیر جداپذیر ہوگی $\Leftrightarrow$ $f(x) \in F[x^p]$۔

(Define separable and inseparable extensions. Prove that an irreducible polynomial $f(x)$ over a field F of characteristic p is unseparable $\Leftrightarrow$ $f(x) \in F[x^p]$.)

6- مفرد میدان کی تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ ایک مفرد میدان F، Q یا $Z/(P)$ سے isomophic ہوگا جبکہ P ایک مفرد عدد ہے۔

(Define a prime field. Prove that a prime field F is either isomorphic to Q or to $Z/(P)$ (where P is a prime number).

P.T.O

(حصہ - C)

7- میدان 'E' پر آٹو مارفزم گروپ $G(E/F)$ کی تعریف کرو۔ اگر E میدان F کا متناہی وسعت ہے تو ثابت کرو کہ $|G(E/F)| \leq [E:F]$ ہے۔

(Define the group $G(E/F)$ of automorphisms of E. Prove that if E is a finite extension of F then prove that $|G(E/F)| \leq [E:F]$.)

8- مقررہ میدان کی تعریف کرو۔ اگر 'H' $G(E/F)$ کا تحت گروپ ہے تب ثابت کرو کہ E_H' E کا تحت میدان ہے۔

(Define a fixed field. If H is a sub group of $G(E/F)$ then E_H is a subfield of E.)

9- فرض کرو کہ میدان E پر اگر H آٹو مارفزمس کے گروپ G کا متناہی تحت گروپ ہے تب ثابت کرو کہ $|H| = [E:E_H]$۔

(Let H be a finite subgroup of the group G of automorphism of a field E. Then prove that $[E:E_H] = |H|$.)

(حصہ - D)

10- اکائی کے primitive n- واں جزر کی تعریف کرو۔ فرض کرو کہ F ایک میدان ہے اور U ایک ضربی گروپ $F^* = F - \{o\}$ کا متناہی تحت گروپ ہے تب ثابت کرو کہ U سائیکلی گروپ ہوگا۔

(Define primitive nth root of unity. Let F be a field and U be a finite subgroup of the multiplicative group $F^* = F - \{o\}$ then prove that U is cyclic.)

11- ثابت کرو کہ $x^4 + x^2 + 1$ اور $x^6 - 1$ کے Galois گروپ مساوی ہیں اور ان کا رتبہ 2 ہے۔

(Prove that the Galois group of $x^4 + x^2 + 1$ is same as that of $x^6 - 1$ and are of order 2.)

12- ثابت کرو کہ نصف قطر '1' والے دائرے کو مساوی رقبہ رکھنے والے مربع میں تبدیل کرنا ناممکن ہے۔

(Prove that it is impossible to construct a square equal in area to the area of a circle of radius one.)

(حصہ - E)

13- ثابت کرو کہ $x^4 + 8 \in \mathbb{Q}[x]$ ' Q پر غیر تحویل پذیر ہے۔

(Show that $x^4 + 8 \in \mathbb{Q}[x]$ is irreducible over Q.)

14- بتلاؤ کہ $x^3 - 2$ کے منقسم میدان کی وسعت کا درجہ 6 ہے۔

(Show that the degree of extension of the splitting field of $x^3 - 2$ is 6.)

15- فرض کرو کہ F میدان ہے جس کا ممیز 2 نہیں ہے۔ اگر $x^2 - a \in F[x]$ ایک ناقابل تحویل کثیر رکنی ہے F پر تب ثابت کرو کہ اس کے Galois گروپ کا رتبہ 2 ہے۔

(Let F be a field of characteristic not equal to 2. If $x^2 - a \in F[x]$ is an irreducible polynomial then prove that its Galois group is of order 2.)

16- Ruler اور Compass کے استعمال سے ثابت کرو کہ ایک زاویہ وجود رکھتا ہے جس کے تین برابر حصے نہیں ہو سکتے۔

(Prove that there exists an angle that cannot be trisected by using Ruler and Compass.)