Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Maths) III Semester Examination, January 2021

MSMM301CCT : Advanced Algebra

پرچہ : ایڈوانسڈ الجبرا

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات / خالی جگہ پُر کرنا / مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو (500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال نمبر : 1

(i) مان لیجیے کہ $f(x) \in F[x]$ کوئی degee > 1 کا Polynomial ہے اگر کسی $\alpha \in F$ کے لیے $f(\alpha)$ =............ ہو تب *f(x)*، F کے اوپر Reducible ہوگا

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4

(ii) کسی Polynomial $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ کو کسی ring R کے اوپر ہم .... کہتے ہیں اگر $a_n=1$ ہو۔

(a) Minimal (b) Monic (c) Zero (d) Ring

(iii) دو Primitive Polynomials کا Product بھی Primitive ہوتا ہے۔ (صحیح / غلط)

(iv) Minimal Polymial کی تعریف کیجیے۔

(v) C ایک Normal Extension ہے R کا۔ (صحیح / غلط)

(vi) مان لیتے ہیں کہ $f(x) \in F(x)$ کوئی degree ≥ 1 کا Polynomial ہے اور α اس کا ایک Root ہے تب α ایک Multiple Root کہلائے گا۔ اگر ....= $f'(x)$

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 5

(vii) اگر $f(x) \in F[x]$, F کے اوپر irreducible ہو تب *f(x)* کے تمام roots کی multiplicity................. ہوگی۔

(a) 0 (b) Same (c) الگ الگ (d) α

(viii) کسی Field F کے لیے Galois Extension کی تعریف کیجیے۔

(ix) اگر F, E کا Galois Extension ہے تب F, E کا ایک Cyclic Extension ہوگا اگر G (E/F) ایک Cyclic Group ہے۔
(صحیح / غلط)

(x) $Q\left(\sqrt[3]{2}\right)$ ....کا ایک Radical Exntension ہے۔

(a) N　　(b) Z　　(c) کسی بھی set کا　　(d) ϕ

حصہ دوم

(2) بتایئے کہ مندرجہ ذیل میں سے کون Irreducible ہیں۔

(i) $x^2 - 2$

(ii) $\phi_p(x) = 1 + x + ... + x^{p-1}$, p ایک Prime ہے۔

(3) مان لیجیے کہ $F \subseteq E \subseteq K$ Fields ہیں اگر $[K:E] < \alpha$ اور $[E:F] < \infty$ ہیں تب

(i) $[K:F] < \infty$　　(ii) $[K:F] = [K:E][E:F]$

(4) Splitting Field کی تعریف کیجیے اور ثابت کیجیے کہ $Q\left(\sqrt{2}\right) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ ایک Splitting Field ہے $x^2 - 2 \in Q[x]$ کی Q کے اوپر۔

(5) مان لے کہ F کے اوپر f(x) ایک Irreducible Polynomial ہے۔ تب ثابت کیجیے کہ *f(x)* کے Multiple Roots ہوں گے اگر $f'(x) = 0$۔

(6) مان لیجیے کہ E ایک Field ہے اور E, H کے Automorphisms کے Group کا Finite Subgroup ہے تب ثابت کیجیے کہ:

$$[E : E_H] = |H|$$

(7) دکھایئے کہ کوئی گروپ $G(Q(\alpha) \mid Q)$ جہاں پر $\alpha^5 = 1$ اور $\alpha \neq 1$ ہو Order 4 کے Cyclic Group کے Isomorphic ہوگا

(8) دکھائے کہ $x^4 + x^2 + 1$ اور $x^6 - 1$ کا Galois Group ایک ہی ہے اور جس کا Order 2 ہے۔

(9) کسی Field کے Separable Extension کی تعریف کیجیے اگر کسی Field F کا Finite Separable Extension 'E' ہو تب ثابت کیجیے کہ F, E کا Simple Extension ہوگا۔

حصہ سوم

(10) Polynomials کی Irreducibility کے لیے Eisenstein Criterion کو بیان اور ثابت کرو۔

(11) اگر $f(x) \in Z[x]$ ایک Primitive ہے تب $Q, f(x)$ کے اوپر Reducible ہوگا اگر اور صرف اگر Z, f(x) کے اور Reducible ہو۔

(12) Galois Field کی تعریف کر کے ثابت کرے کہ اگر F ایک Finite Field ہے تب F کے اوپر degree n کا ایک "Irreducible Polynomial" exists کرے گا۔

(13) "Fundamental Theorem of Galois Theory" کو بیان اور ثابت کیجیے۔

(14) مندرجہ ذیل کو بیان کرے اور ان پر بحث کریں۔

(i) Squaring a Circle

(ii) Duplicating a Cube

☆☆☆