

Maulana Azad National Urdu University
M.Sc. (Maths) III Semester Examination - December - 2019
MSMM302CCT : Advanced Algebra

پرچہ : ایڈوانسڈ الجبرا

Time : 3 hrs

Marks : 70

ہدایات:

- یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارہ ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔
1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔
(10 x 1 = 10 Marks)
 2. حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دو سو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔
(5 x 6 = 30 Marks)
 3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو (500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔
(3 x 10 = 30 Marks)

حصہ اول

سوال نمبر : 1

- (صحیح/غلط) (i) $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ پر Algebraic ہے۔
- (ii) ایک Field F کے Algebraic Closure \bar{F} کی تعریف کرو اور ایک مثال دو۔
- (iii) \mathbb{R} کا Normal Extension ہے۔
- (a) \mathbb{Q} (b) \mathbb{R} (c) \mathbb{C} (d) ان میں کوئی بھی نہیں
- (iv) اگر $f(x) \in F(x)$ Irreducible Polynomial ہے تب $f(x)$ کا Multiple Root ہوگا (=)
- (a) $f(\alpha) = 0$ (b) $f'(\alpha) = 0$ (c) $f''(\alpha) = 0$ (d) ان میں کوئی بھی نہیں
- (v) Simple Extension کی تعریف کرو۔
- (vi) Galois Group کی تعریف کرو اور ایک مثال دو۔
- (vii) $x^4 + x^2 + 1$ کے Galois Group کا رتبہ (Order) ہے۔
- (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) ان میں کوئی بھی نہیں
- (viii) Ruler اور Compass کے استعمال سے زاویہ $\alpha = 54^\circ$ کے تین برابر کے حصے ہو سکتے ہیں۔ (صحیح/غلط)
- (ix) Cyclic Extension کی تعریف کرو اور دو مثالیں دیجیے۔
- (x) اگر $a > 0$ Constructible ہے تب \sqrt{a} بھی Constructible ہے۔ (صحیح/غلط)

حصہ دوم

(2) \mathbb{Q} پر Minimal Polynomial $f(x)$ کی تعریف کرو۔ ایک مثال دو۔ $\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$ کا Minimal Polynomial معلوم کرو۔

(3) Gauss Lemma کو بیان اور ثابت کرو۔

(4) Normal Extension کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ ہر '2' Degree کا Extension 'Normal Extension' ہوگا۔

(5) $p(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ کا Splitting Field معلوم کرو۔

(6) Fixed Field کی تعریف کرو۔ اگر $G(E/H)$ کا Subgroup ہے تب بتلاؤ کہ E, E_H کی Sub Field ہے

(7) اگر F ایک میدان (Field) اور 'U' گروپ $(F^* = F - \{0\})$ کی Finite Sub Group ہو تب بتلاؤ کہ 'U' Cyclic ہے۔

(8) اگر a اور b Constructible ہوں تو بتلاؤ کہ a/b اور $a \cdot b$ Constructible ہوں گے۔

(9) ثابت کرو کہ ایک 'regular n-gon' Constructible ہوگا $\Leftrightarrow \phi(n)$ کے Power میں ہو۔

حصہ سوم

(10) اگر $E \subset F \subset K$ اور $[E:F] < \infty$ اور $[F:K] < \infty$ تب ثابت کرو کہ

$$[E:K] < \infty \quad (i)$$

$$[K:F] = [K:E][E:F] \quad (ii)$$

(11) بتلاؤ کہ $\sqrt{2}$ اور $\sqrt{7}$ پر Algebraic ہیں۔ $Q(\sqrt{2}), Q(\sqrt{7})$ کے Adjunction Fields کے عناصر (Elements)

کو بیان کرو۔ Q پر $Q(\sqrt{2}), Q(\sqrt{7}), Q(\sqrt{14})$ اور $Q(\sqrt{2} + \sqrt{7})$ کے Degrees of Extension معلوم کرو۔

نیز Q پر $Q(\sqrt{2} + \sqrt{7})$ کی Basis معلوم کرو۔

(12) p^n, F عناصر کا ایک میدان (Field) ہے، p -prime اور $n \in \mathbb{N}$ تب ثابت کرو کہ

(i) \mathbb{Z}_p پر $f(x) = x^{p^n} - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ کا Splitting Field ہے اور

(ii) p^n Elements والے دو 'Isomorphic Fields' ہیں۔

(13) ثابت کرو کہ گروپ $G(Q(\alpha)/Q)$ جہاں $\alpha \neq 1, \alpha^5 = 1$ ہیں رتبہ 4 والے کسی Cyclic Group سے

Isomorphic ہے۔

(14) (i) Ruler اور Compass کی مدد سے بتلاؤ کہ ایک زاویہ (Angle) موجود رکھتا ہے جس کے تین برابر حصے نہیں ہو سکتے۔

(ii) ثابت کرو کہ نصف قطر (Radius) 'r' والے دائرے (Area) کو مساوی رقبہ (Area) رکھنے والے مربع (Square) میں تبدیل کرنا

ناممکن ہے۔