

**Maulana Azad National Urdu University**  
**M.Sc (Mathematics) I Semester Examination, February 2022**

**Paper : MSMM101CCT : Real Analysis-I**

پرچہ : حقیقی تجزیہ-I

Time : 3 hrs

Marks : 70

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات دو حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول اور حصہ دوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارہ ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 سوالات ہیں، اس میں سے طالب علم کو کوئی 08 سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً سو (100) لفظوں پر مشتمل ہے ہر سوال کے لیے 05 نمبرات مختص ہیں۔  
(8 x 5 = 40 Marks)
2. حصہ دوم میں 05 سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی 03 سوال کا جواب دینا ہے۔ سوال کا جواب تقریباً ڈھائی سو (250) لفظوں پر مشتمل ہے۔ سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔  
(10x3 = 30 Marks)

**حصہ اول**

- 1- درج ذیل کی تعریف کرو۔ ایک مثال دیجیے۔  
(i) انتہائی نقطہ (Limit Point)  
(ii) ڈرائیوڈ سٹ (Derived Set)  
(iii) کھلا سٹ (Open Set)
- 2- تواتر (Sequence) کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ ہر Bounded 'Convergent Sequence' ہے۔
- 3- بند سٹ (Closed Set) کی تعریف کرو۔ اگر  $\{F_\alpha\}$  بند سٹس (Closed Sets) کا کوئی بھی مجموعہ ہو تب ثابت کرو کہ  $\bigcap_\alpha F_\alpha$  بھی بند سٹ ہوگا۔
- 4- یکساں تسلسل (Uniform Continuity) کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ ہر Uniformly Continuous تفاعل Continuous ہوگا۔
- 5- اگر  $X$  ایک کامپیا کٹ میٹرک فضاء (Compact Metric Space) ہے۔  $Y$  کوئی Metric Space اور  $f : X \rightarrow Y$  پر Continuous ہو تب ثابت کرو کہ  $f(X)$  کا Compact سٹ ہوگا۔
- 6-  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  کے  $x=0$  پر تسلسل اور تفرق کی بحث کرو۔
- 7- اگر  $[a, b]$  کے لیے  $P$  کا Refinement ہو تب بتلاؤ کہ  $L(P, f, \alpha) \leq L(P^*, f, \alpha)$  ہوگا۔
- 8- اگر  $\forall x \in [1, 2], f(x) = 3x + 1$  تب ریمان تکامل (Riemann Integration) کے طریقے سے بتلاؤ کہ  $\int_1^2 (3x + 1) dx = \frac{11}{2}$
- 9- Pointwise Convergence کی تعریف کرو۔ ایک مثال سے اس کی وضاحت کرو۔
- 10- بتلاؤ کہ  $[-1, 1], f_n(x) = \frac{x}{n}$  پر یکساں مستدرق (Uniformly Convergent) ہے اور  $\langle f_n \rangle$  کا Limit Function معلوم کرو

## حصہ دوم

-11 (i) Cauchy's Integral Test کی مدد سے سلسلہ  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$  کے Convergence کی جانچ کرو۔

(ii) سلسلہ  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$  کے مسدق (Convergent) ہونے کی جانچ کرو۔

-12 کامپیاکٹ سٹ (Compact Set) کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ Metric Space کا ہر Compact Set بند سٹ (Closed Set) ہوتا ہے۔

-13 اگر  $X$  اور  $Y$  دو میٹرک فضاں ہیں۔ تب ثابت کرو کہ  $f : X \rightarrow Y$  پر Continuous ہوگا  $\Leftrightarrow Y$  کے ہر Open set 'V' کے لیے  $f^{-1}(V)$  میں Open ہے۔

-14 Riemann–Stieltjes integral کی تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ  $[a, b]$  پر ہر Continuous Function 'f' Riemann–Stieltjes integral ہوگا۔

-15 فرض کرو کہ  $\alpha'$   $[a, b]$  پر بڑھتا ہوا ایک رگنی تعامل (Monotonically Increasing Function) ہے اور  $f_n \in R(\alpha)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) اگر  $f_n \rightarrow f$  (uniformly) تب بتلاؤ کہ  $f \in R(\alpha)$  اور

$$\int_a^b f d\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n d\alpha$$

ہوگا۔

☆☆☆