

**Maulana Azad National Urdu University**

**M.Sc (Mathematics) I Semester Examination, February 2022**

**Paper : MSMM102CCT : Linear Algebra**

**پرچہ : خطی الجبرا**

**Time : 3 hrs**

**Marks : 70**

**ہدایات:**

یہ پرچہ سوالات دو حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول اور حصہ دوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارہ ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 سوالات ہیں، اس میں سے طالب علم کو کوئی 08 سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً سو (100) لفظوں پر مشتمل ہے ہر سوال کے لیے 05 نمبرات مختص ہیں۔  
(8 x 5 = 40 Marks)
2. حصہ دوم میں 05 سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی 03 سوال کا جواب دینا ہے۔ سوال کا جواب تقریباً ڈھائی سو (250) لفظوں پر مشتمل ہے۔ سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔  
(10x3 = 30 Marks)

**حصہ اول**

(1) برداری فضاء  $V(F)$  پر داخلی حاصل ضرب کی تعریف کرو۔ اسکی مثال دو۔ ایک داخلی حاصل ضربی فضاء کی تعریف کرو۔ اگر  $V$  ایک داخلی حاصل ضربی فضاء ہو تب بتلاؤ کہ کسی  $\alpha \in V$  اور ایک مستقل  $c$  کیلئے  $\|\alpha\| = \|c\alpha\|$ ۔

(2) فرض کرو کہ  $V$  اور  $Z$  فیلڈ  $F$  پر Vector Spaces ہیں۔ فرض کرو کہ  $T$  ایک Linear Transformation ہے  $V$  onto  $Z$ ، اگر  $W$ ،  $T$  کا Null Space ہے تب بتلاؤ کہ  $V/W$  اور  $Z$  Isomorphic ہیں۔

(3) فرض کرو کہ  $A$  ایک  $n \times n$  Matrix ہے۔ اگر  $A$  کے Linearly Independent Vectors ہیں تو بتلاؤ  $A$  Diagonalizable ہوگا۔

(4) ایک متشابہ ماتریس کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ متشابہ ماتریسوں کے خصوصی کثیر رکنیاں متشابہ ہوں گی۔

(5)  $U$  اور  $V$ ،  $R^4$  کے Subspaces اس طرح سے ہیں کہ

$$U = \text{Span} [(1, 2, 3, 4), (5, 7, 2, 1), (3, 1, 4, -3)]$$

$$V = \text{Span} [(2, 1, 2, 3), (3, 0, 1, 2), (1, 1, 5, 3)]$$

تب  $L(U, V)$  کا Dimension کیا ہوگا۔

(6) اگر  $A$  ایک  $4 \times 4$  ماتریس (Matrix) ہے اور  $A^5 = 0$  ہو تب  $A$  معلوم کرو۔

(7) میٹرکس (Matrix)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  کے Eigen Values اور Eigen Vectors معلوم کرو۔

(8) بتلاؤ کہ اگر 'S' Vector Space 'V' کا غیر خالی (Non Empty) سب سیٹ ہے تب S کا Linear span  $L[S]$  'V' کا subspace ہے۔

(9) مان لو  $a_1 = (1, 0, 1)$ ،  $a_2 = (0, 1, -2)$  اور  $a_3 = (-1, -1, 0)$  کے ویکٹرز ہیں۔ اگر  $f$   $R^3$  پر ایک Linear Functional اس طرح سے ہے کہ  $f(a_1) = 1$ ،  $f(a_2) = -1$  اور  $f(a_3) = 3$  تب  $a = (x, y, z)$  کے لیے  $f(a)$  معلوم کرو۔

(10) کسی برداری فضاء  $V(F)$  کے تحت فضاء کی تعریف کرو کسی میدان  $F$  پر برداری فضاء کے ابعاد سے کیا مراد ہے۔ اگر ایک محدود ابعادی برداری فضاء  $V$  کے دو تحت فضاء  $U$  اور  $W$  ہوں تو ثابت کرو کہ  $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

### حصہ دوم

(11) بتلاؤ کہ ہر محدود ابعادی داخلی حاصل ضربی فضاء Orthonormal basis رکھتی ہے۔

(12) اگر  $f$  اور  $g$   $F$  پر non zero polynomials ہیں تب بتلاؤ کہ

(i)  $fg$  ایک Polynomial (non zero) ہے۔

(ii)  $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$

(iii) اگر  $f$  اور  $g$  Monic Polynomials ہیں تو ثابت کرو کہ  $fg$  بھی Monic Polynomial ہوگا۔

(13) اگر  $V$ ،  $F$  پر ایک Finite Dimensional ویکٹری اسپیس (Space) ہے تو  $V$  کے dual  $V^*$  کی تعریف کرو اور بتلاؤ کہ  $\dim V = \dim V^*$ ۔

(14) تعریف کرو۔

(i) ہم مارفیت Homomorphism

(ii) یک مارفیت Isomorphism

(iii) کرنل Kernel

ثابت کرو کہ Homomorphism کا کرنل (Kernel) ایک Subspace ہے۔

(15) Cayley - Hamilton Theorem کو بیان اور ثابت کرو۔