Maulana Azad National Urdu University

M.Sc (Mathematics) III Semester Examination, February 2022

Paper : MSMM302CCT : Advanced Algebra

پرچہ : اعلیٰ الجبرا

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات دو حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول اور حصہ دوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 سوالات ہیں، اس میں سے طالب علم کو کوئی 08 سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً سو (100) لفظوں پر مشتمل ہے ہر سوال کے لیے 05 نمبرات مختص ہیں۔ **(8 x 5 = 40 Marks)**
2. حصہ دوم میں 05 سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی 03 سوال کا جواب دینا ہے۔ سوال کا جواب تقریباً ڈھائی سو (250) لفظوں پر مشتمل ہے۔ سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ **(10x3 = 30 Marks)**

حصہ اول

1۔ Gauss کے مفروضہ (Lemma) کو بیان اور ثابت کرو۔

2۔ Q پر Minimal Polynomial p(x) کی تعریف کرو۔ $a = 3\sqrt{1+i\sqrt{7}}$ کا Minimal Polynomial معلوم کرو۔

3۔ ایک مثال کے ذریعہ (i) Finite Extention ‘

(ii) Algebraic Extension کی تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ ہر Finite Extension ‘ Algebraic Extension ہوتا ہے۔

4۔ فرض کرو کہ $f(x) \in F(x)$ ایک Polynomial اور $\deg(f(x)) \geq 1$ ‘ $f(x)$ 'α' کا Root ہے۔ بتلاؤ کہ $f(x)$ 'α' کا Multiple Root ہوگا۔ $\Leftrightarrow$ $f'(\alpha) = 0$

5۔ Prime Field کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ ہر Field F کا Prime Field ‘ $\mathbb{Z}_p\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{(p)}\right)$ یا Q سے Isomorphic ہوگا۔

6۔ Splitting Field کی تعریف کرو۔ Q پر $f(x) = x^3 - 2 \in (x)$ کی Splitting Field معلوم کرو۔

7۔ اگر $E = Q\left(\sqrt[3]{2}\right)$ ' $F = Q$ کا Extension ہے تب $G(Q(\sqrt[3]{2})/Q)$ معلوم کرو

8۔ مقررہ میدان (Fixed Field) کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ Fixed Field کسی Field E کا Sub Field ہوگا۔

9۔ فرض کرو کہ F ایک Field ہے اور 'U' (F*=F-{0},.) کا Finite Subgroup ہے تب بتلاؤ کہ U Cyclic ہوگا۔

10۔ Cyclic Extension کی تعریف کرو ثابت کرو کہ کسی Finite Field F, کا Finite Extension ‘ Cyclic Extension ہوگا۔

حصہ دوم

11۔ Eisensteins کی کسوٹی (Criteria) کو بیان اور ثابت کرو۔اس کے استعمال سے بتلاؤ کہ $2x^5-5x^4+5$ ' Q پر Irreducible ہوگا۔

12۔ اگر $F \subseteq E \subseteq K$ میدان ہیں اور اگر $[K:E]<\infty$ اور $[E:F]<\infty$ ہوتو ثابت کرکہ (i) $[K:F]<\infty$ ہے

(ii) $[K:F]=[K:E]\,[E:F]$

13۔ Separable Exention کی تعریف کرو۔ثابت کروکہ ہر Finite Separable Extension کسی Field کا Simple Extension ہوگا

14۔ فرض کروکہ E,H پر Group of Automorphism کا Finite Sub Group ہےتب ثابت کروکہ $[E:E_H]=|H|$ ہوگا۔

15۔ (i) Ruler اور Compass کی مدد سے بتلاؤ کہ ایک زاویہ (Angle) وجود رکھتا ہے جس کے تین برابر کے حصے نہیں ہوسکتے۔

(ii) ثابت کرکہ '1' Radius والے دائرے (Circle) کے مساوی رقبہ (Equal Area) رکھنے والے مربع (Square) میں تبدیل کرنا ناممکن ہے۔

☆☆☆