Maulana Azad National Urdu University
B.Sc. (MPC/MPCs) III Semester Examination - December - 2019

BSMM301CCT - Algebra الجبرا

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. حصہ دوم میں 8 سوالات ہیں، اس میں سے طالب علم کو کوئی 05 سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 06 نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. حصہ سوم میں 5 سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی 03 سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو (500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ - اول

سوال نمبر 1

(i) اگر 'H' گروپ G (Group) کا تحت گروپ (Sub Group) ہے تب H کے G میں Distinct Right Cosets کے نمبر کو ہم کہتے ہیں۔

(a) Order of H in G (b) Index of H in G (c) G میں H کا پاور (Power) (d) G میں H کی ڈگری (Degree)

(ii) اگر $H \neq \phi$ ، $H \subseteq G$ ہو اور $ab^{-1} \in H$ ، $\forall a,b \in H$ تب H, G کا .... ہوگا۔

(a) Subfield (b) Superset (c) Subgroup (d) ان میں سے کوئی نہیں

(iii) $\left(S=\{1,2,3,4,5,6,7\},\odot_8\right)$ ایک .... ہے۔

(a) گروپ (Group) (b) گروپ نہیں ہے (c) Non-commutative گروپ (d) ان میں کوئی بھی نہیں

(iv) $\left(G=\{1,2,3,4,5,6,\}, \odot_7\right)$ میں '3' کا معکوس (inverse)............................ ہے۔

(a) 5 (b) 4 (c) 1 (d) 2 (e) کوئی نہیں

(v) اگر H گروپ G کا سب گروپ ہے تب H^{-1} = ... ہے۔

(vi) Commutative Division Ring کو .... کہتے ہیں۔

(a) Integral Domain (b) Field (c) Skew Field (d) ان میں کوئی بھی نہیں

(vii) اگر رنگ (Ring) (R,+,·) میں $\forall x \in R, x^2 = x$ ہو تب R کو .... Ring کہتے ہیں۔

(a) Boolean (b) Prime (c) Integral Domain (d) ان میں کوئی بھی نہیں

(viii) $Z_6=\{0,1,2,3,4,5\}$ ایک .... ہے۔

(a) Integral Domain (b) Commutative Ring ہے Integral Domain نہیں

(c) Field (d) ان میں کوئی بھی نہیں

(ix) Commutative Ring کی Homomorphic Image .... ہوگی۔

(a) Integral Domain (b) Field (c) Commutative Ring (d) ان میں کوئی بھی نہیں

(x) اگر R انٹگرل ڈومین (Integral Domain) ہو تو $R[x]$ بھی Integral Domain ہے۔ (صحیح/غلط)

حصہ - دوم

2۔ بتلاؤ کہ $\left(R=\left\{a+b\sqrt{3} \mid a,b\in Q\right\},+,.\right)$ ایک Ring ہے۔

3۔ اگر $f:R\to R'$ ایک Homomorphism ہو تو بتلاؤ کہ

(i) $f(0)=0'$ (ii) $\forall a\in R,\ f(-a)=-f(a)$ اور (iii) $f\ is\ 1-1 \Leftrightarrow \ker f=\{0\}$

4۔ اگر E_1, E_2 Ring R کے دو ایڈیال (Ideals) ہو تب بتلاؤ کہ $E_1\cap E_2$ بھی R کا ایڈیال (Ideal) ہوگا۔ کیا $E_1\cup E_2$ Ideal ہے۔

ایک مثال کے ذریعہ سمجھائیے۔

5۔ فرض کرو کہ $M_2=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a,b,c,d\in\mathbb{Z}\right\}$ ایک Ring ہے تب بتلاؤ کہ $S=\left\{\begin{bmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{bmatrix} \middle| p,q\in\mathbb{Z}\right\}$، M_2 کا

تحت Ring (Subring) ہوگا۔

6۔ ثابت کرو کہ Cyclic Group کا رتبہ (Order) اس کے Generator کے Order کے برابر ہوگا۔

7۔ (i) $E=\{2n \mid n\in\mathbb{Z}\}$ اور (ii) $H=\{5n \mid n\in\mathbb{Z}\}$ کے لیے $(\mathbb{Z},+)$ گروپ میں Left Coset Decomposition

معلوم کیجیے۔

8۔ فرض کرو کہ $G=\{(a,b) \mid a\neq 0, b\in\mathbb{R}\}$ پر Binary Operation '*' کی تعریف اسطرح کی گئی ہے کہ

$(a,b)*(c,d)=(ac,bc+d)\forall(a,b)\in G$ تب بتلاؤ کہ (G,*) ایک Non-Abelian گروپ ہے۔

9۔ ثابت کرو کہ ہم مارفیت (Homomorphic) $f:G\to G$ 1-1 ہوگا $\Leftrightarrow$ *Kerf = {e}*

حصہ - سوم

10۔ (i) اگر H گروپ G کا Subgroup ہے تب ثابت کرو کہ H کے کوئی دو Right Cosets Disjoint, ہوں گے یا Identical ہونگے

(ii) بتلاؤ کہ گروپ G کے کسی بھی سب گروپ H کے دو Right Cosets کے درمیان 1-1 Correspondence ہوگا۔

11۔ اگر $I(G)$ گروپ G کے تمام Inner Automorphism کا سیٹ ہو تب بتلاؤ کہ $I(G)$ Automorphism گروپ A(G) کا Normal Subgroup ہوگا۔

12۔ (i) گروپ G کا تحت سیٹ G,N کا Normal Subgroup ہوگا $\Leftrightarrow gNg^{-1} = N$ ، $\forall g \in G$

(ii) اگر $G = \{(a,b) \mid a \neq 0, b \in \mathbb{R}\}$ * Operation کے تحت گروپ ہے اور '*' کی تعریف اس طرح ہے کہ

(a,b) * (c,d) = (ac, bc+d) تب بتلاؤ کہ $H = \{(1,b) / b \in R\}$ ، G کا Normal Subgroup ہوگا۔

13۔ ہم مارفیت کے بنیادی نظریہ (Fundamental Theorem of Homomorphism) کو بیان اور ثابت کرو۔

14۔ اگر R ایک UFD ہے تب ثابت کرو کہ R(x) کے دو Primitive Polynomials کا حاصل ضرب (Product) بھی Primitive Polynomial ہوگا۔

☆☆☆