Maulana Azad National Urdu University

M.Sc : Mathematics IV Semester Examination -September, 2020

Paper : MSMM401CCT : Functional Analysis تفاعلی تجزیہ

Total Marks : 70 **Time : 3 hours**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. **حصہ اول** میں **10** لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. **حصہ دوم** میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو **(200)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **6** نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. **حصہ سوم** میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو **(500)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **10** نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال: 1

(i) ہر 'Normed Linear Space' ایک Metric Space ہے۔ (صحیح/غلط)

(ii) 'Convex Functional' کی تعریف کرو۔

(iii) R^2 کے تحت ایک Inner Product Space .... Inner Product کے تحت۔

(iv) Identity Operator ‘ I : H ——> H Self Adjoint ہے۔ (صحیح/غلط)

(v) ایک Operator‘ T : H ——> H ‘ Self Adjoint ہوگا۔اگر T* = ——— ہو۔

(vi) 'Open Mapping' کے نظریہ کو بیان کرو۔

(vii) اگر T : R ——> R کی تعریف اس طرح کی گئی ہے کہ $Tx=x^3$ تب T کے Fixed Points .... ہیں۔

(viii) 'Identity Map' کے Fixed Points .... ہیں۔

(ix) اگر $T : R^2 \longrightarrow R^2$ کی تعریف $Tx=\frac{1}{2}x$ ہو تب T کا Unique Fixed Point ہوگا۔ (صحیح/غلط)

(x) اگر $X=\{x\in\mathbb{R} / x\geq 1\}$ اور T : X——> X کی تعریف $Tx=\frac{x}{2}+x^{-1}$ ہو تب T ایک Contraction ہے یا نہیں۔

حصہ دوم

2۔ Normed Linear Space کی تعریف کرو ایک مثال دو۔ ثابت کرو کہ Norm function ' $\|\cdot\|$ Continuous ہے۔

3۔ اگر N اور N^1 دو Normed Linear Spaces ہیں $T : N \longrightarrow N^1$ ایک Linear Transformatoin ثابت کرو کہ:

(i) T مسلسل (Continuous) ہے۔ اور

(ii) 'T' Bounded مساوی ہیں۔

4۔ H 'Hilbert Space میں کسی سٹ S کے Orthogonal Complement کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ

$H^{\perp} = \{0\}, \{0\}^{\perp} = H$ اور $S \cap S^{\perp} = \{0\}$ ہیں۔

5۔ 'Bessels Inequality' کو بیان اور ثابت کرو۔

6۔ Linear Operator کے Graph کی تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ:

(T کا Graph) T_G بند (Closed) ہے $\Leftrightarrow$ $T : D \to Y (D \subseteq X)$ Closed Subspace ہے۔

7۔ Hahn Banach Theorem کو بیان کرو اور اس کا ایک Application دو۔

8۔ 'Contraction Map' کی تعریف کرو۔ ایک مثال دو۔

9۔ 'X' ایک Banach Space ہے۔ $T : X \longrightarrow X$ ' ایسا Mapping ہے کہ $(r > 0)$ T^r ایک Contraction ہے تب ثابت کرو کہ T کا ایک Unique Fixed Point ہوگا۔

حصہ سوم

10۔ ثابت کرو کہ $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2 .... xn) / x_i \in \mathbb{R}\}$ ، $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |xi|^2\right)^{1/2}$ کے تحت ایک Banach Space ہے۔

11 ۔ ثابت کرو کہ فضاء $l_p = \left\{x =< x_n >_{n=1}^{\infty} / \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\}$ ، $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ کے تحت ایک Banach Space ہوگا

12۔ ثابت کرو کہ 'Adjoint Operation' $T \longrightarrow T^*$ ذیل کے بیانات پورا کرتا ہے۔

(i) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$ (ii) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$

(iii) $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$ (iv) $T^{**} = T$

13۔ Closed Graph Theorem کو بیان اور ثابت کرو۔

14۔ 'Banach Cotnraction Principle' کو بیان اور ثابت کرو۔

☆ ☆ ☆