Maulana Azad National Urdu University

Semester Examination - June, 2021

M.Sc. (Mathematics) - IV Semester

Paper : (MSMM404CCT) Functional Analysis

پرچہ : تفاعلی تجزیہ

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات دو حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول اور حصہ دوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 سوالات ہیں، اس میں سے طالب علم کو کوئی آٹھ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً سو (100) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 5 نمبرات مختص ہیں۔ **(8 x 5 = 40 Marks)**

2. حصہ دوم میں 5 سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً ڈھائی سو (250) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

1. Normal Space کی تعریف کرو۔ ایک مثال دو۔ بتلاؤ کہ ہر Normed Space ایک Metric Space ہوگا۔

2. اگر $T: N \longrightarrow N^1$ ایک خطی تحویل (Linear Transformation) ہے تب ثابت کرو کہ بیانات (i) N پر 'T' Continuous ہے اور (ii) $\bar{o} \in N$ پر 'T' Continous ہے۔ ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔

3. اگر H ایک Hilbert Space اور $S(\neq \phi) \subseteq H$ ہو تب بتلاؤ کہ $H, S^{\perp}$ کی بند (Closed) خطی تحت فضا (Linear Subspace) ہوگی۔

4. ثابت کرو کہ Hilbert Space H پر Self Adjoint 'T' Operator ہوگا $\Leftrightarrow$ $< Tx, x > \forall x \in H$ ایک حقیقی عدد (Real Number) ہے۔

5. B(H) پر Adjoint Operation کے لیے حسب ذیل کو ثابت کرو:

   (i) $(T_1, T_2)^* = T_2^* T_1^*$

   (ii) $||T^*|| = ||T||$

6. ہلبرٹ فضاء (Hilbert Space) H میں $x, y \in H$ کے لیے ثابت کرو کہ

   $$|< x, y| \leq \|x\| \|y\|$$

7. تعریف کرو (i) خطی تحویل کے گراف (Graph of Linear Transformation) (ii) Closed Linear Transformation

8. فرض کرو کہ N اور N^1 دو Normed فضائیں ہیں اور $D \subseteq N$ ۔ ثابت کرو کہ $T:D \longrightarrow N^1$ بند ہوگا $\Leftrightarrow$ T کا گراف T_G بند ہو۔

9. 'Contraction Map' کی تعریف کرو ایک مثال دو۔ بتلائیں کہ ہر 'Contraction Map' Uniformly Continuous ہوگا۔

10. مقررہ نقطہ (Fixed Point) کی تعریف کرو۔

    (i) $T : R \rightarrow R, T(x) = x^2 \; \forall x \in \mathbb{R}$

    (ii) $T : R^2 \rightarrow R, T(x_1, x_2) = x_1$ کے Fixed Point معلوم کرو۔

حصہ دوم

11. ثابت کرو کہ فضا $l^n{}_p$ جس میں ہر $x=(x_1,x_2,...xn)\in l^n{}_p$ کے لیے $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|xi|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ہو ایک Banach Space ہے۔

12. ثابت کرو کہ فضاء $C(X)=\{f:X\to\mathbb{R}\,/\,f\ is\ continuous\ and\ bounded\}$ ، $\|f\|=\underset{x\in X}{Sub}|f(x)|$ کے تحت ایک Banach Space ہوگی۔

13. Banach Space 'B' پر Projection کی تعریف کرو۔ اگر M ہلبرٹ فضاء H کی ایک بند تحت فضا (Closed Sub Space) ہو تب ثابت کرو کہ $H=M\oplus M^{\perp}$ ہوگا۔

14. Open Mapping کی تعریف کرو۔ Open Mapping کے نظریہ کو بیان اور ثابت کرو۔

15. Banach Contraction Principle کو بیان اور ثابت کرو۔

☆ ☆ ☆