Maulana Azad National Urdu University

Semester Examination - June, 2021

M.Sc. (Mathematics) - IV Semester

Paper : (MSMM403CCT) Calculus of Variations and Integral Equations

پرچہ : تغیرات احصاء اور تکملی مساواتیں

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات دو حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول اور حصہ دوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 سوالات ہیں، اس میں سے طالب علم کو کوئی آٹھ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً سو (100) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 5 نمبرات مختص ہیں۔ **(8 x 5 = 40 Marks)**

2. حصہ دوم میں 5 سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً ڈھائی سو (250) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

1. فنکشنل (Functional) $I[y(x)]=\int_0^1\{(y')^2+12xy\}dx,$ ، $y(0)=0,\ y(1)=1$ کا extremal معلوم کرو ۔

2. فنکشنل (Functional) $I[y(x)]=\int_0^1\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x}dx$ ، $y(0)=0,\ y(1)=1$ کا extremal معلوم کرو ۔

3. فنکشنل (Functional) $I[y(x)]=\int_0^1\left(1+(y'')^2\right)dx$ ، کا extremal معلوم کرو جبکہ $y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(1)=1,\ y'(1)=1$ ہیں۔

4. فنکشنل (Functional) $I[y(x),z(x)]=\int_0^{\pi/2}\left(y'^2+z'^2+2yz\right)dx,$ کے extremals معلوم کرو جبکہ Boundary conditions $y(0)=0, y(\pi/2)=-1;\ z(0)=0, z(\pi/2)=1$ ہیں۔

5. فنکشنل (Functional) $I[z(x,y)]=\iint_D\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy$ کے لئے Ostrogradsky equation لکھیے۔

6. ثابت کرو کہ مساوت $I[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,y')dx$ کے extremum کے لئے ضروری شرط (necessary condition) $\delta I=\delta\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,y')dx=0$ ہے۔

7. بتلاؤ کہ function $\varphi(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x}}$ ، Integral equation $\int_0^x\frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}dt=1$ کا حل ہے۔

8. IVP $\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$ ، $y(0)=1,\ y'(0)=0$ کو Integral equation میں تبدیل کرو۔

.9 بتلاؤ کہ Integral equation $\varphi(x)=\lambda\int_0^1(3x-2)t\varphi(t)dt$ کی eigenvalues اور eigenfunctions نہیں ہے۔

.10 Kernel $K(x,t)=\sin x\cos t$ ؛ $a=0,\ b=\frac{\pi}{2}$ کے لئے Resolvent kernel معلوم کرو۔

حصہ دوم

.11 فنکشنل (Functional) $I[y(x)]=\int_0^{x_2}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}dx$ کے extremum curves معلوم کرو جبکہ $y(0)=0$ اور $y_2=x_2+5$ ہیں۔

.12 دائرا (Circle) $x^2+y^2=4$ اور خط (straight line) $2x+y=6$ کے درمیان shortest distance معلوم کرو۔

.13 Integral equation $\varphi(x)=(1+x)^2+\int_{-1}^{1}(xt+x^2t^2)\varphi(t)\,dt$ کا حل معلوم کرو۔

.14 Resolvent kernel کے ذریعے سے Integral equation $\varphi(x)=\left(\sin x-\frac{x}{4}\right)+\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}xt\varphi(t)\,dt$ کا حل معلوم کرو ۔

.15 Integral equation $\varphi(x)=1+\lambda\int_0^x e^{3(x-t)}\varphi(t)\,dt$ کا حل معلوم کرو ۔

☆ ☆ ☆