

Maulana Azad National Urdu University

Master of Science (Mathematics) : II Semester Examination, September 2021

Paper : MSMM213CCT : Real Analysis-II (Measure & Integration)

Time : 3 hrs

Marks : 70

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات دو حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول اور حصہ دوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارہ ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 سوالات ہیں، اس میں سے طالب علم کو کوئی 08 سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً سو (100) لفظوں پر مشتمل ہے ہر سوال کے لیے 05 نمبرات مختص ہیں۔
(8 x 5 = 40 Marks)
2. حصہ دوم میں 05 سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی 03 سوال کا جواب دینا ہے۔ سوال کا جواب تقریباً ڈھائی سو (250) لفظوں پر مشتمل ہے۔ سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔
(10x3 = 30 Marks)

حصہ اول

1. تفاعلات کے (Equi - Continuous) خاندان کی تعریف کیجئے اور ایک ایسے خاندان کی مثال دو جو (Equi - Continuous) نہیں ہے۔
2. Power Series اور Radius of Convergence کی تعریف کیجئے $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ کے Radius of Convergence کو معلوم کیجئے۔
3. Exponential تفاعل $E(x)$ Strictly Increasing ہوتا ہے ثابت کیجئے۔
4. ایک Vector Space کے Basis کی تعریف کیجئے اور ایک مثال دیجئے۔
5. ایک linear Transformation کے Range اور Null Space کی تعریف کیجئے اگر $T : U \rightarrow V$ ایک linear transformation ہے تب بتاؤ کہ V کا Sub Space ہوگا۔
6. ایک Self map کے Fixed Point کی تعریف کیجئے۔ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ جس کی تعریف $f(x) = x^3$ سے کی گئی ہے کہ Fixed point معلوم کیجئے۔
7. Outer Measure کی تعریف کیجئے اگر Q Rational Numbers کا سٹ ہو تب بتاؤ کہ $m^*(Q) = 0$ ہے۔
8. ثابت کرو کہ Measurable Sets کا Finite Union بھی Measurable ہوگا۔
9. Measurable Function کی تعریف کیجئے اگر f ایک Measurable Function ہو تب ثابت کرو کہ $|f|$ بھی Measurable ہوگا۔
10. Fatou's Lemma کو بیان اور ثابت کیجئے۔

حصہ دوم

11. Stone weierstrass کے نظریہ کو بیان اور ثابت کیجیے۔

12. اگر $A, B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ اور c ایک مستقل ہوتب ثابت کرو کہ

$$\|cA\| = |c|\|A\| \text{ اور } \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\text{i})$$

$$\|BA\| \leq \|B\|\|A\| \quad (\text{ii})$$

13. ثابت کرو کہ کسی Interval کا Outer measure اس کی لمبائی ہوگی۔

14. اگر سیٹ E کا Measure متناہی ہے اور f, g پر دو Bounded Measurable ہوں تب دو مستقل a, b کے لیے ثابت کرو۔

$$\int_E (af + bg) = a \int_E f + b \int_E g \quad (\text{i})$$

$$\int_E f \leq \int_E g \iff f \leq g \text{ پر } E \quad (\text{ii})$$

15. Bounded Convergence کے نظریہ کو بیان اور ثابت کیجیے۔

☆☆☆