Maulana Azad National Urdu University

Master of Science (Mathematices) : II Semester Examination, August 2021

Paper : MSMM202CCT : Topology

پرچہ :ٹوپولوجی

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات دوحصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول اور حصہ دوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 سوالات ہیں، اس میں سے طالب علم کو کوئی 08 سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً سو(100) لفظوں پر مشتمل ہے ہر سوال کے لیے 05 نمبرات مختص ہیں۔ **(8 x 5 = 40 Marks)**
2. حصہ دوم میں 05 سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی 03 سوال کا جواب دینا ہے۔ سوال کا جواب تقریباً ڈھائی سو(250) لفظوں پر مشتمل ہے۔ سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ **(10x3 = 30 Marks)**

حصہ اول

حصہ اول

1. اگر X ایک لامحدود (infinte) سیٹ ہے اور $\tau = \{\varphi, A \subseteq X \mid X - A = A^c$ محدود ہے $\}$ تب ثابت کیجیے کہ (X,τ) ایک ٹوپولوجیکل اسپیس ہے۔

2. اگر (X,τ) ایک ٹوپولوجیکل اسپیس ہے اور $A \subseteq X$ ہو تب $\overline{A} = \operatorname{int}(A) \cup b(A)$ ۔

3. ثابت کیجیے کہ T_2- اسپیس ایک T_1- اسپیس ہوتا ہے لیکن اس کا کنورس (Converse) درست نہیں۔

4. ہومومورفزم (Homomorphism) کی تعریف کیجیے۔ ثابت کیجیے کہ ریگولر اسپیس کی ہومومورفک امیج بھی ریگولر ہوگی۔

5. منسلک اسپیس (Connected) کی تعریف کیجیے اور ثابت کیجیے کہ (X,τ) کنیکٹیڈ ہوگا اگر اور صرف اگر X اور ϕ اکیلے دو ایسے سیٹ ہیں جو اوپن اور کلوزڈ دونوں ہیں۔

6. ثابت کیجیے کہ کومپیکٹ اسپیس کا ہر ایک کلوزڈ سب اسپیس بھی کومپیکٹ ہوگا۔

7. اگر $X \neq \phi$ اور $X,\ \beta$ کے سب سیٹ کا مجموعہ (Collection) ہو تب ثابت کیجیے کہ β کسی ٹوپولوجی τ کے لیے X پر بیس (Base) ہوگا اگر اور صرف اگر

$$X = \bigcup\{\beta_1 \mid \beta_1 \in \beta\} \qquad \text{(i)}$$

$$\forall x \in \beta_1 \cap \beta_2, \exists \beta_3 \in \beta \qquad \text{(ii)}$$

$$\ni x \in \beta_3 \subset \beta_1 \cap \beta_2, \forall \beta_1, \beta_2 \in \beta$$

8. سپریبل (Separable) اسپیس کی تعریف کیجیے۔ثابت کیجیے کہ ہرایک سیکنڈ کاؤنٹیبل ٹوپولوجیکل اسپیس سپریبل ہوگا۔

9. ثابت کیجیے کہ ہائسڈورف (Hausdorff) اسپیس کا ہرایک کومپیکٹ سب اسپیس کلوزڈ ہوگا۔

10. Heine Borel Theorem کو بیان اور ثابت کیجیے۔

حصہ دوم

11. (a) ثابت کیجیے کہ دوٹوپولوجی کا انٹرسیکشن بھی ایک ٹوپولوجی ہوتی ہے۔دوٹوپولوجی کے یونین (Union) کے لیے بھی بحث کیجیے۔

(b) اگر (X,τ) ایک ٹوپولوجیکل اسپیس ہے اور $A \subseteq X$ ہوتب A کلوزڈ (Closed) ہوگا اگر اور صرف اگر $A' \subseteq A$ ۔

12. کسی میپنگ (Mapping) $f:(X,\tau_1)\rightarrow(Y,\tau_2)$ کے لیے مندرجہ ذیل برابر (Equivalent) ہیں۔

(i) اگر Y, c میں کلوزڈ ہے تب $f^{-1}(c)$ ، X میں کلوزڈ ہوگا۔

(ii) اگر Y, U میں اوپن ہے تب $f^{-1}(U)$ ، X میں اوپن ہوگا۔

(iii) f مسلسل (Continuous) ہے۔

(iv) $\forall A \subset X\ , f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ ۔

13. (a) T_3- اسپیس کی تعریف کیجیے۔ثابت کیجیے کہ $(\mathbb{R},\mho)$ ایک T_3- اسپیس ہے۔

(b) ثابت کیجیے کہ نارمل اسپیس کی ہرایک کلوزڈ کنٹونیس امیج بھی نارمل ہوگی۔

14. اگر S, X میں مکمل (Complete) ہے اور X, Y کا سب اسپیس ہے تب Y مکمل ہوگا اگر اور صرف اگر Y کلوزڈ ہے۔

15. اگر $h:(X,\tau_1)\underrightarrow{onto}(Y,\tau_2)$ 1-1 ہے تب ثابت کیجیے کہ مندرجہ ذیل برابر (Equivalent) ہیں۔

(i) h ایک ہومومورفزم ہے

(ii) h اوپن اور کنٹونیس ہے

(iii) h کلوڈزاور کنٹونیس ہے

(iv) $\forall A \subset X, h(\overline{A}) = \overline{h(A)}$ ۔

☆☆☆