Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Maths) I Semester Examination, April 2021

MSMM101CCT : Real Analysis - I

پرچہ : حقیقی تجزیہ - I

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو **(200)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **6** نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو **(500)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **10** نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال نمبر : 1

(i) ناطق اعداد کا سٹ (Set of Rationals) Countable ہے یا Uncountable؟

(ii) تواتر (Sequence) $\left\langle S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \frac{1}{n!} \right\rangle$ .... ہے۔

(a) Divergent (b) Convergent (c) Oscillatory (d) ان میں سے کوئی نہیں

(iii) Increasing Sequence کی ایک مثال کے ساتھ تعریف کرو۔

(iv) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) =$ .... سٹ ہے۔ (Open کھلا / Closed بند)

(v) Connected Set کی ایک مثال دو۔

(vi) $f(x) = \begin{cases} Sin\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ کی discountinuity .... ہے۔

(a) First Kind (b) Removable (c) Second Kind (d) ان میں سے کوئی نہیں

(vii) [0 2] کے لیے اگر $P = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2\}$ ایک Partition ہو تو P کا ایک Refinement لکھیے۔

(viii) اگر $f : [01] \to \mathbb{R}$ کی تعریف $f(x) = x^2$ ہو اور $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ تب $U(P,f) =$ .... ہے۔

(a) 14/32 (b) 15/32 (c) 19/32 (d) ان میں سے کوئی نہیں

(ix) اگر P*, P کا Refinement ہے تب $U(P,f,\alpha)\le U(P^*,f,\alpha)$ ہے۔ (صحیح/غلط)

(x) اگر S=(-1,1) ہواور $f_n(x)=x^n \ \forall x\in S$ ہوتب $f_n(x)\to f(x)=0$ ہوگا۔ (صحیح/غلط)

حصہ دوم

(2) تعریف کرو: (i) تواتر (Sequence) (ii) تحت تواتر (Sub Sequence)

(iii) (Cauchys Sequence) ایک مثال دو۔

(3) Cauchys Integral Test کی مدد سے $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)p}$ کے Convergence پر بحث کرو۔

(4) (Metric Space) کی تعریف کرو۔ دو مثالیں دو۔

(5) ثابت کرو کہ Metric Space 'X' کے Compact Subsets بندسٹس (Closed Set) ہوں گے

(6) Riemann Integral کی تعریف کرو اور ثابت کرو کہ $\int_{\underline{a}}^{b} fd\alpha \le \int_{a}^{\bar{b}} fd\alpha$ ہے۔

(7) ثابت کرو کہ ہر Monotonic Function تکمل پذیر (Integrable) ہے۔

(8) ثابت کرو کہ $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ '0' پر Pointwise Convergent ہے۔ کیا یہ Uniform convergence ہے؟

(9) اگر $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ E پر ایک Sequence of Functions اس طرح ہے کہ $\forall x\in E\ \forall n=1,2,3....|f_n(x|\le M_n$

تب $\sum f_n$ converge ہوگا اگر $\sum M_n$ converge ہو۔

حصہ سوم

(10) Convergence کی جانچ کرو:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\tan\frac{1}{n}$ (iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ (iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{n!}$

(11) تعریف کرو۔

(i) کھلا سٹ (Open Set) (ii) بندسٹ (Closed Set)

ثابت کرو کہ میٹرک فضاء (metric Space) X میں کوئی" Subset E‘ Open ہے $\Leftrightarrow$ E^C Closed ہو۔

(12) ثابت کرو کہ کوئی $f \in R(\alpha)$, function ہوگا۔ $\Leftrightarrow$ ہر $\in > 0$ کے لیے ایک Partition P اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \in$ ہے۔

(13) $\mathbb{R}$ کا تحت سٹ (Subset) 'E' Connected ہے $\Leftrightarrow$ ہر $x, y, \in E$ کے لیے اگر x<z<y ہو تب $z \in E$ ہوگا۔

(14) ایک Metric Space X میں E پر فرض کرو کہ $f_n \to f$ $uniformly$ اور 'x' E کا limit point ہے
اگر $\underset{t \to x}{Lim}\ f_n(t) = A_n$ ہو تب $<A_n>$ Converge ہوگا اور

$$\underset{t \to x}{Lim}\ f(t) = \underset{n \to \infty}{Lim}\ A_n$$

☆☆☆