Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. Maths (MSMM102CCT) I Semester Examination, April 2021

Paper : Linear Algebra

پرچہ : خطی الجبرا

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو(500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے10 نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال نمبر : 1

(i) اگر A ایک Hermitian Matrix ہو تو A^θ = ______________ ہیں۔

(ii) 2x2- Matrices کے subspace کا Dimension جو ماترس (Matricies) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$ Spanned ہے.................ہوگا۔

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(iii) U اور V ، R^3 کے Subspaces اس طرح سے ہیں کہ

U = Span [(1, 3, 4), (5, 7, 1), (1, 5, -13)]

V = Span [(2, 1, 3), (0, 1, 2), (1, 5, 3)]

تب Hom(U,V) کا Dimension ہے۔

(a) 3 (b) 6 (c) 9 (d) ان میں کوئی بھی نہیں

(iv) اگر A ایک 4x4 Matrix ہے اور $A^4 = 0$ ہو تب ___________ ہوگا۔

(a) A^4=I (b) A^4=A (c) A^4=0 (d) ان میں کوئی بھی نہیں

(v) اگر A ایک Square Matrix اس طرح ہے کہ det A = trace A اور eigen values کا sum = ان کے حاصل ضرب کے مساوی ہو تب A .... ہوگا۔

(a) Upper Triangular Matrix (b) Diagonal Matrix

(c) Idempotent Matrix (d) Nilpotent Matrix

(vi) Inner Product Space میں Norm کی تعریف ذیل سے کی جاسکتی ہے۔

(a) $\|V\| = \langle v, v \rangle$ (b) $\|V\| = \langle u, v \rangle$ (c) $\|V\| = \langle v, v \rangle^2$ (d) کسی سے بھی نہیں

(vii) Rank-Nullity کے نظریہ کو بیان کرو۔

(viii) فرض کرو کہ $A \in M_{3X3}(R)$ ، تب (t^2+1) Polynomial ہے۔

(a) A کا Minimal Polynomial (b) A کا Characterstics Polynomial

(c) a اور b دونوں صحیح ہیں (d) کوئی بھی صحیح نہیں ہے۔

(ix) میٹرکس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ کے Eigen values ہیں۔

(a) i, -i, 1, 1 (b) 1, 3, -1, 5 (c) 1, 2, 5, 6 (d) کوئی بھی نہیں

(x) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ہوتو A^3 کے Eigen values ہیں۔

(a) 2, 5, 6 (b) 8, 27, -1 (c) 2, 3, -1 (d) کوئی بھی نہیں

حصہ دوم

(2) بتلاؤ کہ اگر S' Vector Space V کا غیرخالی (Non Empty) سب سیٹ ہے تب S کا Linear span L[S]، V کا subspace ہے۔

(3) R^2 سے R^2 کے ذیل کے کون سے تفاعلات T خطی تحویل ہیں۔

i) $T(x_1,x_2) = (1+x_1,x_2)$ ii) $T(x_1,x_2) = (x_1-x_2,\ 0)$

(4) اگر V، F پر ایک Finite Dimentional ویکٹر اسپیس (Vector Space) ہے تو V کے dual V* کی تعریف کرو اور بتلاؤ کہ dim V = dim V*۔

(5) تعریف کرو۔

(i) ہم مارفیت Homomorphism (ii) یک مارفیت Isomorphism (iii) کرنل Kernel

ثابت کرو کہ Homomorphism کا کرنل (Kernel) ایک Subspace ہے۔

(6) فرض کرو کہ U اور V Field 'F' پر Vector Spaces ہیں تب Addition اور Scalar Multiplication کی تعریف کرو جس سے Hom (U,V) F پر Vector Space بن جائے۔

(7) مان لو $a_1 = (1, 0, 1)$، $a_2 = (0, 1, -2)$ اور $a_3 = (-1, -1, 0)$ R^3 کے ویکٹرس ہیں۔ اگر f R^3 پر ایک Linear Functional اس طرح سے ہے کہ $f(a_1) = 1$، $f(a_2) = -1$ اور $f(a_3) = 3$ تب $a = (x, y, z)$ کے لیے f(a) معلوم کرو۔

P.T.O

(8) برداروں $(1,0,-1), \alpha_2 = (1,2,1), \alpha_3 = (0,-3,2)$ $\alpha_1 =$ کی خطّی طور پر تابع ہونے کا امتحان کرو۔

(9) فرض کرو کہ V اور Z فیلڈ F پر Vector Spaces ہیں۔ فرض کرو کہ T ایک Linear Transformation ہے V onto Z،
اگر W، T کا Null Space ہے تب بتلاؤ کہ V/W اور Z Isomorphic ہیں۔

حصہ سوم

(10) کیلی ہملٹن نظریہ (Cayley - Hamilton Theorem) کو بیان اور ثابت کیجیے۔

(11) برداروں $\alpha_1 = (1,0,-1), \alpha_2 = (1,2,1), \alpha_3 = (0,-3,2)$ کی خطّی طور پر تابع (Linearly Dependent) ہونے کا امتحان کرو۔

(12) Inner product space تعریف کیجیے اور Cauchy-Schwarz inequality ثابت کیجیے۔

(13) کسی برداری فضاء V(F) کے تحت فضاء کی تعریف کرو کسی میدان F پر برداری فضاء کے ابعاد سے کیا مراد ہے۔ اگر ایک محدود ابعادی برداری فضاء V کے دو تحت فضاء U اور W ہوں تو ثابت کرو کہ $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

(14) میٹرکس (Matrix) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ کے Eigen Values اور EigenVectors معلوم کیجیے

☆☆☆