Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Maths) I Semester Examination, April 2021

MSMM103CCT : Ordinary Differential Equations

پرچہ : معمولی تفرقی مساوات

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. **حصہ اول** میں **10** لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. **حصہ دوم** میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو **(200)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **6** نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. **حصہ سوم** میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو **(500)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **10** نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال نمبر : 1

(i) $\dfrac{1}{(D-2)(D-3)}e^{2x} = ...$

(a) xe^{2x} (b) $-xe^{2x}$ (c) xe^{-2x} (d) $-xe^{-2x}$

(ii) Singular Points ہیں۔

(a) ریگولر(Regular) (b) Irregular (c) Regular or Irregular (d) ان میں سے کوئی نہیں

(iii) "Ordinary Point" کی تعریف کیجیے۔

(iv) $Q'_n - xQ'_{n-1} = ...$ جہاں پر $Q_n(x)$ ایک "Second Kind" کا Legendre فنکشن ہے۔

(a) Q_{n-1} (b) nQ_{n-1} (c) Q'_{n-1} (d) nQ'_{n-1}

(v) کیا $\{x, x^2, x^3\}$ لینیر لی انڈی پینڈنٹ (L.I.) ہے۔اگر ہاں تو ثابت کیجیے۔

(vi) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{2dy}{dx} + 4y = e^x \cos x$ کا P.I ہے۔

(a) $\frac{1}{2}e^x$ (b) $\frac{1}{2}e^x \sin x$ (c) $\frac{1}{2}e^x \cos x$ (d) ان میں سے کوئی نہیں

(vii) اگر x, V کا فنکشن ہے تب $\frac{1}{f(D)}e^{ax}V = ...$

(a) $e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}V$ (b) $e^{-ax}\frac{1}{f(D+a)}V$ (c) e^{ax} (d) e^{-ax}

(viii) "Strum-Liouville Equation" لکھیے۔

(ix) $y=\sqrt{x}\frac{dy}{dx}+\frac{k}{dy/dx}$ کا Order کیا ہے؟

(a) 1 (b) 2 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 3

(x) ان تمام "Straight Lines" کے لیے جو Origin سے پاس ہوتی ہوا ایک Differential Equation معلوم کیجیے۔

حصہ دوم

(2) ثابت کیجیے کہ:

$$(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty} Z^n P_n(x), |x|\le 1, |z|<1$$

(3) مندرجہ ذیل ایکویشن (Equation) کے لیے Picard's Method کی مدد سے "Third Approximation" تک حل کیجیے۔

$$\frac{dy}{dx}=z, \frac{dz}{dx}=x^3(y+z)$$

جہاں پر $\begin{cases} y=1 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$ جب کہ x=0

(4) "n=0" کے لیے Bessle's Equation کا Series میں حل معلوم کیجیے۔

(5) حل کیجیے۔ $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=\sec 3x$

(6) مندرجہ ذیل انیٹیل ویلیو پروبلم (I.V.P) کو Picard's Methods کی مدد سے Third Approximation تک حل کیجیے۔

$$\frac{dy}{dx}=2y-2x^3-3$$

جب کہ y = 2 ہو جہاں x = 0

(7) مندرجہ ذیل کو حل کیجیے۔

$$\frac{d^4y}{dx^4}-y=x^2\sin x$$

(8) $\frac{x^3dy^3}{dx^3}+2x^2\frac{dy^2}{dx^2}+2y=10\left(x+\frac{1}{x}\right)$ کو حل کیجیے۔

(9) ثابت کیجیے۔

$$P_n(\cos Q)=\frac{1.3.5....(2n-1)}{2^{n-1}\,n!}\left[\cos nQ+\frac{1.n}{1.(2n-1)}\cos(n-4)Q+\frac{1.3.n(n-1)}{1.2(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)Q+...\right]$$

حصہ سوم

(10) مندرجہ ذیل بونڈری ویلیو پروبلم (B.V.P) کے لیے گرینس فنکشن (Green's Function) لکھیے۔

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mu^2 y = 0$$
$$y(0) = 0$$
$$y(1) = 0$$

(11) مندرجہ ذیل Strum Liouville Problem کے لیے تمام Eigen Values اور Eigen Function لکھیے۔

$$y'' + \lambda y = 0$$

جہاں پر $y(0)+y'(0)=0$ اور $y(1)+y'(1)=0$

(12) سریز (Series) میں حل کیجیے۔

$$9x(1-x)y'' - 12y' + 4y = 0$$

(13) $\frac{dy^2}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2ny = 0$ کو Series میں حل کیجیے۔

(14) (i) Lipschitz Condition کو بیان کرے۔

(ii) دکھایئے کہ $f(x,y) = xy^2$ ریکٹینگل (Rectangle) $R: |x| \le 1, |y| \le 1$ پر Lipschitz Condition کی حمایت کرتا ہے

لیکن $S: |x| \le 1, |y| < \infty$ پر نہیں

(iii) ثابت کیجیے کہ مندرجہ ذیل کے لیے Picards's Theorem میں کونسٹنٹ (Constant) 'a' یونیٹی (Unity) سے چھوٹا ہونا چاہیے

$dy/dx = y,\ y(0) = 1$

☆☆☆