Maulana Azad National Urdu University

Ph.D. (Mathematics) Course Work Examination, April - 2021

Paper - PHMM101DST : Pure Mathematics

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. **حصہ اول** میں **10** لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. **حصہ دوم** میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو **(200)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **6** نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. **حصہ سوم** میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو **(500)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **10** نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال : 1

(i) 31 رتبہ (Order) والے Cyclic Group کے ____________ Generators ہونگے۔

29 (a) 28 (b) 30 (c) (d) کوئی بھی نہیں

(ii) اگر کسی رنگ (Ring) R میں $x^2 = x \forall x \in R$ ہو تب $x + x =$ ___________ ہے۔

0 (a) x (b) $2x$ (c) (d) ان میں سے کوئی نہیں

(iii) ہر میدان (Field) میں proper ideals نہیں ہونگے۔ (صحیح / غلط)

(iv) $\theta : G \times X \to X$ ، $\theta(a,x) = axa^{-1}$ گروپ action ہے یا نہیں؟

(v) اگر θ ایک Group Action ہے تب $\theta(e,x) =$ _________ ہے۔

(vi) اگر $f : R \to R$ کی تعریف $f(x) = x^2$ ہو تب f کے ___________ Fixed Points ہونگے۔

0 (a) 2 (b) 1 (c) 3 (d)

(vii) Contraction Map کی ایک مثال دو۔

(viii) 'Contraction Map' تسلسل (Continuous) ہوگا۔ (صحیح / غلط)

(ix) غیر خالی فضی سٹ (Non - Empty Fuzzy Set) کی تعریف کرو۔

(x) اگر $U = \{a, b, c, d, e\}$ اور $\mu = \{(a,0.2),(b,0.3),(c,1),(d,0.8),(e,0)\}$ ایک Fuzzy Set ہو تب $\mu_{0.5} =$ __________ ہے۔

{c} (a) {b, d} (b) {c, d} (c) {a, c} (d)

P.T.O

حصہ دوم

.2 عظیم ترین ایڈیال (Maximal Ideal) کی تعریف کرو۔ ایک مثال دو۔

.3 اگر $f: R \xrightarrow{onto} R^1$ ایک Homomorphism ہے جسکا Kernel 'K' ہے۔ تب ثابت کرو کہ f' Isomorphism ہوگا $\Leftrightarrow$ K = {0}

.4 اگر گروپ G ایک غیر خالی سٹ X پر act کرتا ہو تب $x \in X$ کے لیے ثابت کرو کہ Stabilizer (x) St' G کا تحت گروپ (Subgroup) ہوگا۔

.5 X پر G کا Action ہے، تب $x \in X$ کے Orbit کی تعریف کرو۔ نیز بتاؤ کہ X کے عناصر (Elements) کے Orbits X کا Partition بنتے ہیں۔

.6 Contraction Map کی تعریف کرو اور بتلاؤ کہ ہر Contraction Map، Uniformly Continuous ہوتا ہے۔

.7 Contraction Principle کے استعمال سے بتلاؤ کہ غیر خطی تکمّلی مساوات (Non-Linear Integral Equation) $0 \le t \le 1,\ 0 < \lambda < 1$ $f(t) = \int_0^1 e^{-st} \cos(\lambda f(s))ds$ کا یکتا حل (Unique Solution) ہوگا۔

.8 Fuzzy Set کی تعریف کرو ایک مثال دو۔

.9 ایک مثال کے ذریعہ Soft Set اور Soft Subset کی تعریف کرو۔

حصہ سوم

.10 Prime Ideal کی تعریف کرو۔ ایک مثال دو۔ ثابت کرو کہ اکائی کے ساتھ والے (Commutative Ring with Unity) رنگ R کا ہر Ideal 'P' Prime ہوگا۔ $\Leftrightarrow$ R/P ایک Integral Domain ہو۔

.11 بناک Contraction Principle کو بیان کرو (State Banach Contraction Principle)۔ اگر $X = \mathbb{R}$ ہو، اور $\|x\| = |x|$ اور $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ کے لیے اگر $f:[a,b] \to [a,b]$ تفرق پذیر (Differentrable) تفاعل (Function) اس طرح ہے کہ $|f('x| \le k|<1|$ تب ثابت کرو کہ x = f (x) کا حل ہوگا۔

.12 Banach Contraction Principle کی مدد سے بتلاؤ کہ System of Linear Equations کا حل ممکن ہے۔

.13 اگر 'θ' گروپ G کا X پر action ہو اور $a \in G$ کے لیے اگر $f_\theta(a): X \to X$ کی تعریف اس طرح ہے کہ $f_\theta(a)(x): \theta(a,x) \forall x \in X$ تب بتلاؤ کہ $f_\theta(a)$' X پر ایک Permutation ہے اور f_θ' G سے S (X) ایک Homonorphism بیان کرتا ہے۔

.14 ایک مثال کے ذریعہ تعریف کرو:

(i) فضّی اتحاد (Fuzzy Union) (ii) فضّی تقاطع (Fuzzy Intersecton)

(iii) Fuzzy Complementation

☆☆☆