Maulana Azad National Urdu University

Ph.D. 1st Semester (Mathematics) Course Work Examination, April - 2021

Paper - PHMM102CCT : Essential Mathematics

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. **حصہ اول** میں **10** لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. **حصہ دوم** میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو **(200)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **6** نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. **حصہ سوم** میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو **(500)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **10** نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال 1 :

(i) کسی 'ring R' ____ کو ہم boolean کہتے ہیں۔ اگر x^2 = ... ، $\forall x \in R$ ۔

(a) x (b) o (c) 1 (d) x^3

(ii) اگر p کسی 'ring R' کا ایک 'Fixed Element' ہے تب $Ip = \{x \in R : px = 0\}$ ، R کی ایک Subring ہے۔
(صحیح / غلط)

(iii) 'Monic Polynomial' کی تعریف کیجیے۔

(iv) مندرجہ ذیل پر غور کیجیے۔

(I) کسی ring کے دو ideals کا intersection بھی ایک ideal ہوتا ہے۔

(II) کسی ring کے دو ideals کا union بھی ring کا ایک ideal ہوتا ہے۔

(a) I اور II دونوں صحیح ہیں (b) صرف I صحیح ہے (c) صرف II صحیح ہے (d) I اور II دونوں غلط ہیں

(v) اگر G ایک group ہے جس میں کنہیں تین 'Consecute integers' کے لیے $(ab)^n = a^nb^n$ ہے، تب ab = ... ۔

(a) 0 (b) 1 (c) ba (d) ان میں سے کوئی نہیں

(vi) اگر G ایک 'finite group' ہے تب اس کے کسی subgroup کا order اس group کے order کو _______ کرتا ہے۔

(a) ضرب (b) تقسیم (c) 2 قدر بڑھا دیتا ہے (d) ان میں سے کوئی نہیں

(vii) 'Uniform Continuity' کی تعریف کیجیے۔

(viii) R ایک 'Complete Metric Space' ہے۔ (صحیح / غلط)

(ix) کسی Metric Space (X, d) کو ہم Compact نہیں کہتے ہیں، اگر ہمارے پاس X کا کم سے کم ایک Cover ایسا ہو جس کا کوئی ___________ Subcover نہ ہو۔

(a) finite (b) infinite (c) zoro (d) ان میں سے کوئی نہیں

(x) "Group" کی تعریف کیجیے۔

حصہ دوم

.2 اگر R ایک ring ہے تب

(i) a.0 = 0.a = 0 (ii) a(-b) = (-a)b = -(ab)

(iii) (-a) (-b) = ab (iv) a(b-c) = ab - ac $\forall a,b,c \in R$

.3 'Compact Metric Space' کی تعریف کیجیے اور اس کی مثال بھی پیش کیجیے۔ ثابت کیجیے کہ Compact Metric Space کی Continuous Image بھی Compact ہوتی ہے۔

.4 'Metric Space' کی تعریف کیجیے۔ اور ثابت کیجیے کہ R ایک Metric Space ہے۔

.5 ثابت کیجیے کہ کسی ring R کے دو ideals کا intersection بھی R کا ایک ideal ہوتا ہے۔

.6 مندرجہ ذیل کے لیے Canonical Form کیجیے۔

(i) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ (ii) $t - s + p - q(1 + \frac{1}{x}) + (\frac{z}{x}) = 0$

.7 Lagranges Method سے حل کیجیے۔

$(y^2 z/x)\ P + xzq = y^2$

.8 $2 - 3x + 4x^2$ کو Legendre Polynomial کی شکل میں ظاہر کریے۔

.9 حل کیجیے۔ $\frac{dy^2}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = e^{2x} + e^x$

حصہ سوم

.10 کسی فنکشن 'f' کے لیے Continuity کی تعریف کیجیے۔ مان لیتے ہیں کہ $f:(x,d) \rightarrow (y,d^*)$ تب مندرجہ ذیل Equivalent ہیں۔

(i) کسی $p \in X$ پر فنکشن 'f' Continuous ہے۔

(ii) $\forall \in > 0 \exists \delta > 0 \exists f[B(p,\delta)] \subset B(f(p),\in)$

(iii) $f(p)$ کے ہر ایک d*-nbd. N، کے لیے ہمارے پاس p کا M،d-nbd. کچھ اس طرح ہوگا کہ $f(M) \subset N$

.11 مندرجہ ذیل کو سیریز (Series) میں حل کیجیے۔

$9x(1-x)y'' - 12y' + 4y = 0$

12. میٹرک اسپیس (Metric Space) کی تعریف کیجیے۔ مان لیتے ہیں کہ $X \neq \phi$ کوئی سیٹ ہے، اور d کوئی فنکشن ہے۔ جسکی تعریف اس طرح کی گئی ہے۔ $d(x, y) = \begin{Bmatrix} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{Bmatrix}$ ، تب ثابت کیجیے کہ (X, d) ایک میٹرک اسپیس ہے۔

13. ثابت کیجیے کہ کسی 'field F' کا ہر ایک finite extension، ایک algebraic extension ہوتا ہے، جبکہ اسکا متضاد (converse) true نہیں ہے۔

14. ثابت کیجیے کہ اگر Usual Addition اور Multiplication کو 'Binary Composition' لیا جائے تب $R = \{a + b\sqrt{3} / a, b \in Q\}$ ایک ring ہے۔

☆☆☆