Maulana Azad National Urdu University

B.Sc. (MPC/MPCS) III Semester Examination - February-March- 2022

BSMM301CCT: Algebra

پرچہ : الجبرا

Marks : 70 **Time : 3 hrs**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات دو حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول اور حصہ دوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. **حصہ اول** میں **10** لازمی سوالات ہیں اس میں طالب علم کو کوئی آٹھ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً سو **(100)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **5** نمبرات مختص ہیں۔ **(8 x 5 = 40 Marks)**

2. **حصہ دوم** میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً ڈھائی سو **(250)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **10** نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

(1) ثابت کیجیے کہ اگر N کسی گروپ G کا تحت گروپ (Sub-Group) ہے تب N نارمل (Normal) ہوگا اگر اور صرف اگر $\forall g \in G$ ، $gNg^{-1} = N$ ۔

(2) ثابت کیجیے کہ کسی گروپ G کے کوئی دو تحت گروپس کا انٹرسیکشن بھی G کا تحت گروپ ہوگا۔ ان کے یونین کے متعلق بھی تبصرہ کیجیے۔

(3) ثابت کیجیے کہ جمع اور ضرب کے عام سناہی عمل (Binary Operation) کے تحت $R = \{a + b\sqrt{3} / a, b \in Q\}$ ایک رنگ ہے۔

(4) اگر A اور B کسی رنگ R کے دو آئیڈیل (Ideal) ہیں تب ثابت کیجیے کہ $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ بھی R کا آئیڈیل ہوگا۔

(5) اگر R یونیٹی کے ساتھ ایک انٹیگرل ڈومین (Integral domain) ہے تب R اور $R[x]$ کے یونیٹی مساوی (same) ہوں گے۔

(6) اگر H اور K کسی گروپ G کے دو تحت گروپس ہیں جہاں پر H گروپ G میں نورمل ہے تب ثابت کیجیے کہ

$$\frac{HK}{H} = \frac{K}{H \cap K}$$

(7) اگر G ایک انفینائیٹ سائکلک گروپ (Infinite Cyclic Group) ہے تب Aut G معلوم کیجیے۔

(8) کوئی رنگ R تقلیبی (Commutative) ہے اگر اور صرف اگر $\forall a, b \in R, (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(9) اگر G ایک گروپ ہے جہاں پر

$$(ab)^3 = a^3b^3$$

$\forall a, b \in G, (ab)^5 = a^5b^5$ تب ثابت کیجے کہ G تقلیبی (Abelian) ہے۔

(10) مندرجہ ذیل کے لیے مثالیں دیجیے۔

(i) ایسی رنگ جو تقلیبی نہیں ہے لیکن اس کی تحت رنگ تقلیبی ہے۔

(ii) رنگ جس کی کوئی یونیٹی نہیں ہے لیکن تحت رنگ کی یونیٹی ہے۔

حصہ دوم

(11) اگر R ایک UFD (Unique factorization domain) ہے تب ثابت کیجیے کہ $R[x]$ میں دو پرمیٹو پولینومیل کا ضرب بھی R[x] میں پرمیٹو پولینومیل ہوتا ہے۔

(12) اگر $f : G \to G'$ ایک ہوموفرزم (Homomorphism) ہے تب ثابت کیجیے کہ

(i) $f(e) = e'$

(ii) $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

(iii) $\forall n \in Z$ ، $f(x^n) = [f(x)]^n$

(iv) Kerf ایک نورمل تحت گروپ ہے

(v) f $1-1$ ہے $\Leftrightarrow Kerf = \{e\}$

(13) اگر R اور R' رنگ ہیں اور $f : R \xrightarrow{onto} R'$ ایک ہوموفرزم ہے تب

$$\frac{R}{Kerf} \approx R'$$

(14) اگر G کوئی گروپ ہے تب ثابت کیجیے کہ

(i) G میں اکائی عنصر (Identity element) یونیک (unique) ہوتا ہے

(ii) $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$

(iii) $b \cdot a = c \cdot a \Rightarrow b = c$

(iv) $(a^{-1})^{-1} = a$

(v) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

(15) Inner Automorphism کی تعریف کیجیے۔ ثابت کیجیے کہ G کی تمام Inner Automorphisms کا سیٹ، AutG کا تحت گروپ ہوتا ہے۔

☆ ☆ ☆