



متناسب تاخیر کی ڈیفرنشیل مساوات کو حل کرنے کے لیے ویولیت تکنیکیں

تحقیقی مقالہ برائے
ڈاکٹر آف فلاسفی
ریاضیات

مقالہ نگار

بشارت حسین
اندراج نمبر: A181337

نگران

ڈاکٹر افروز

ایسوسی ایٹ پروفیسر اور صدر

شعبہ ریاضی

اسکول آف سائنسز

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی حیدرآباد- انڈیا- 500032

2022



اقرار نامہ

میں بشارت حسین اقرار کرتا ہوں کہ یہ تحقیقی مقالہ بعنوان ”مناسب تاخیر کی ڈیفرنشیل مساوات کو حل کرنے کے لیے ویولٹ تکنیکیں“ جو اسکول آف سائنس کے شعبہ ریاضی میں ڈاکٹر افروز ایسوسی ایٹ پروفیسر کی نگرانی میں برائے حصول سند پی ایچ۔ ڈی (ریاضی) تیار کیا گیا میری ذاتی کاوش ہے۔
 نیز اس سے پہلے یہ مقالہ کسی یونیورسٹی میں برائے حصول سند پیش نہیں کیا گیا ہے۔

مقام: حیدرآباد
 تاریخ:

دستخط
 بشارت حسین

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی
 MAULANA AZAD NATIONAL URDU UNIVERSITY
 (A Central University, Ministry of Education, Govt. of India)
 (Accredited Grade "A" by NAAC)



تصدیق نامہ

تصدیق کی جاتی ہے کہ جناب بشارت حسین نے اپنا تحقیقی مقالہ بعنوان ”متناسب تاخیر کی ڈیفرنشیل مساوات کو حل کرنے کے لیے ویولیٹ تکنیکیں“ میری راست نگرانی میں تحقیقی اصولوں کے مطابق تکمیل کیا ہے۔ لہذا میں انہیں ریاضیات میں پی ایچ۔ ڈی کی سند کے حصول کے لیے مقالہ ہذا کو اسکول آف سائنسز کے شعبہ ریاضی کے تحت داخل کرنے کی اجازت دیتا ہوں۔

ڈین

اسکول آف سائنسز

مقام: حیدرآباد

تاریخ:

نگران

ڈاکٹر افروز

ایسوسی ایٹ پروفیسر اور صدر

شعبہ ریاضی



Synopsis Authenticity Certificate & Metadata

Name of the Research Scholar	Basharat Hussain
Enrolment No.	A181337
Degree (M. Phil / Ph. D.)	Ph.D.
Department / Centre / Institution	Department of Mathematics
Guide/Supervisor	Dr. Afroz (Associate Professor)
Thesis / Dissertation Title approved in DRC held on:	Wavelet Techniques for Solving Proportional Delay Differential Equations Date: 20-Apr-2022
Registration Date	24-Jul-2018
Submission Date	10-Oct-2022
Keywords	Proportional Delay Differential Equations, Fractional Differential Equations, Simultaneous Proportional Delay Differential Equations, Collocation Method, Haar wavelet, Numerical Solution.
Language of Thesis	Bilingual: English, Urdu
Title	Wavelet Techniques for Solving Proportional Delay Differential Equations
Format of accompanying material (PDF file, Image file, Text file, etc.)	PDF file

I hereby certify that the Synopsis contained in this CD/DVD is complete in all respect and is same as submitted in print.

Signature of the Scholar

Signature of the Guide

Signature of the Librarian



Consent Form for Digital Archiving

Name of the Research Scholar	Basharat Hussain
Degree (M. Phil / Ph.D.)	Ph.D.
Department / Centre / Institution	Department of Mathematics
Guide / Supervisor	Dr. Afroz (Associate Professor)
Thesis / Dissertation Title	Wavelet Techniques for Solving Proportional Delay Differential Equations

1. I do hereby authorize Maulana Azad National Urdu University and its relevant Departments to archive and to make available my thesis or dissertation in whole or in part in the University's Electronic Thesis and Dissertations (ETD) Archive, University's Intranet or University's website or any other electronic repository for Research Theses setup by other Departments of Govt. of India and to make it accessible worldwide in all forms of media, now or hereafter known.
2. I retain all other ownership rights to the copyright of the thesis/dissertation. I also retain the right to use in future works (such as articles or books) all or part of this thesis or dissertation.

Signature of Scholar

Signature & Seal of Guide

Signature of Librarian



CERTIFICATE OF PLAGIARISM CHECK

The following certificate of plagiarism check is issued with certification for the bonafide work carried out by him/her under my supervision and guidance. This thesis is free from plagiarism and has not been submitted previously in part or in full to this or any other University or institution for the award of any degree or diploma.

1.	Name of the Research Scholar	Basharat Hussain
2.	Research Programme	Ph.D.
3.	Title of the Thesis / Dissertation	Wavelet Techniques for Solving Proportional Delay Differential Equations
4.	Name of the Supervisor	Dr. Afroz (Associate Professor)
5.	Department / Research Centre	Department of Mathematics
6.	Acceptable Maximum Limit	10%
7.	% of Similarity of content Identified	9%
8.	Software Used	Turnitin
9.	Date of verification	03-Oct-2022

Signature of the Scholar

(Signature of the Supervisor)

(Head of the Department)

(University Librarian)



Digital Receipt

This receipt acknowledges that Turnitin received your paper. Below you will find the receipt information regarding your submission.

The first page of your submissions is displayed below.

Submission author: Basharat Hussain
Assignment title: Central Library
Submission title: Wavelet Techniques for Solving Proportional Delay Differenti...
File name: 031022_Thesis_Basharat.pdf
File size: 2.69M
Page count: 125
Word count: 27,999
Character count: 134,603
Submission date: 03-Oct-2022 01:22PM (UTC+0530)
Submission ID: 1915242147



Wavelet Techniques for Solving Proportional Delay Differential Equations

*Thesis submitted for the award of the Degree of
Doctor of Philosophy*

in

MATHEMATICS

by

BASHARAT HUSSAIN

ENROLLMENT No: A181337

Under the supervision of:

Dr. Afroz

Associate Professor & Head
Department of Mathematics
School of Sciences

Maulana Azad National Urdu University
Hyderabad, India-500032
2022

Wavelet Techniques for Solving Proportional Delay Differential Equations

ORIGINALITY REPORT

9%

SIMILARITY INDEX

6%

INTERNET SOURCES

6%

PUBLICATIONS

3%

STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	cyberleninka.org Internet Source	<1 %
2	Submitted to Higher Education Commission Pakistan Student Paper	<1 %
3	Submitted to Universiti Kebangsaan Malaysia Student Paper	<1 %
4	Submitted to University of Witwatersrand Student Paper	<1 %
5	www.bdigital.unal.edu.co Internet Source	<1 %
6	d.researchbib.com Internet Source	<1 %
7	Saedeh Foadian, Reza Pourgholi, S. Hashem Tabasi, Javad Damirchi. "The inverse solution of the coupled nonlinear reaction–diffusion equations by the Haar wavelets", International Journal of Computer Mathematics, 2017	<1 %

63 Submitted to University of Melbourne <1 %
Student Paper

64 library2.smu.ca <1 %
Internet Source

65 SAKAR, Mehmet Giyas. "Numerical solution of neutral functional-differential equations with proportional delays", Balıkesir Üniversitesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, 2017. <1 %
Publication

66 A.H. Bhrawy, E. Tohidi, F. Soleymani. "A new Bernoulli matrix method for solving high-order linear and nonlinear Fredholm integro-differential equations with piecewise intervals", Applied Mathematics and Computation, 2012 <1 %
Publication

67 www.hindawi.com <1 %
Internet Source

Exclude quotes On

Exclude matches < 14 words

Exclude bibliography On

اظہارِ تشکر

الحمد للہ، تمام تعریفیں اللہ کے لیے ہیں، جو نہایت ہی رحم کرنے والا، تمام جہانوں کا رب، روزِ جزا کا پالنے والا اور مالک ہے، حمد اس کے رسول محمد صلی اللہ علیہ وسلم اور ان لوگوں کے لیے جو آخر وقت تک ان کی پیروی کرتے ہیں۔ میں اللہ کا شکر ادا کرتا ہوں کہ اس نے میری زندگی کو اس کوشش کے دوران برقرار رکھا۔

میں اپنے پی ایچ ڈی کے سفر کے دوران بہت سے لوگوں کی رہنمائی اور تعاون کے لیے ان کا بہت زیادہ شکر گزار ہوں۔ میں اپنے سپروائزر ڈاکٹر افروز کا تہہ دل سے شکریہ ادا کرتا ہوں کہ انہوں نے اپنے وسیع علم، انمول مشورے اور مہربان تعاون کا اشتراک کیا۔ میں ان کے وقف شدہ وقت اور ان تمام اعتماد کے لئے بے حد مشکور ہوں جو انہوں نے مجھے ان سالوں میں عطا کیا ہے۔ ڈاکٹر افروز، ایسوسی ایٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد کے ساتھ کام کرنا میرے لیے اعزاز کی بات ہے، جن کی سخت تربیت اور مسلسل حوصلہ افزائی ہی کام کو مکمل کرنے میں معاون ثابت ہوئی۔

میں پروفیسر سلمان احمد خان، ڈین، اسکول آف سائنسز، پروفیسر اختر پرویز، یونیورسٹی لائبریرین، مانو، حیدرآباد کا ایک دوستانہ اور حوصلہ افزا ماحول فراہم کرنے کے لیے تہہ دل سے شکریہ ادا کرتا ہوں۔ میں پروفیسر ایس این حسن کا بے حد مشکور ہوں کہ انہوں نے میری ڈاکٹریٹ کی تعلیم کے دوران بصیرت افروز خیالات، تعمیری تنقید اور ہر ممکن طریقے سے غیر متزلزل حمایت کا اشتراک کیا۔ میں محترم اور متحرک فیکلٹی ممبران پروفیسر ایس مقبول احمد، ڈاکٹر سید صلاح الدین، ڈاکٹر خواجہ معین الدین، ڈاکٹر سبھاش الہا، ڈاکٹر ماجد اے چوہدری، ڈاکٹر سید وسیم راجہ کا ان کی قیمتی تجاویز، مناسب رہنمائی اور کسی نہ کسی طریقے سے بروقت امداد کے لیے شکریہ ادا کرتا ہوں۔

میں اشفاق احمد، فاروق حسین، طاہر منظور اور شعبہ کے اپنے تمام ساتھیوں کا بھی شکریہ ادا کرنا چاہوں گا، جنہوں نے میری تحقیقی کام کے دوران مدد اور حوصلہ افزائی کی۔ اس کے علاوہ جناب روپک، مسٹر سہیل، مسٹر دانیم، اور دیگر غیر تدریسی عملے کا بھی شکریہ کہ وہ مہربان اور معاون ہیں۔

میں ڈاکٹر عبداللہ، ڈاکٹر شاہ جہاں، ڈاکٹر اکمل رضا، مس انشیکا تور اور جناب فیض امام کا بھی شکریہ ادا کرنا چاہوں گا کہ انہوں نے میری پی ایچ ڈی کی پوری مدت میں اپنے علم، تجربے، اور ہدایات کا اشتراک کیا۔

میں مختلف اداروں اور مراکز جیسے کہ قومی مرکز برائے ریاضی، کرناٹک کی سنٹرل یونیورسٹی، حیدرآباد یونیورسٹی، آئی آئی ٹی (بی ایچ یو)، جے ای سی آر سی یونیورسٹی (جے پور)، یونیورسٹی کلج آف انجینئرنگ (عثمانیہ یونیورسٹی)، بی آئی ٹی ایس پیلانی (حیدرآباد) کا بے حد مشکور ہوں جنہوں نے ورکشاپ، انسٹرکشنل اسکول، فیکلٹی ڈیولپمنٹ پروگرام، اور کانفرنسوں کے انعقاد کیے، میرا انتخاب کیا اور تحقیق کے مختلف شعبوں کے مختلف تصورات اور پہلوؤں کو سمجھنے اور سیکھنے میں واقعی میری مدد کی۔ میں شعبہ ریاضی، بی آئی ٹی ایس پیلانی (حیدرآباد) کا بھی شکریہ ادا کرتا ہو جنہوں نے مجھے بین الاقوامی وینار CPMV-2021 کے دوران بہترین پیپر پریزنٹیشن کے ایوارڈ سے نوازا۔

میں اپنے دوستوں ڈاکٹر حمزہ مطہر، ڈاکٹر عبدالمنان، جناب زبیر السام، جناب اسد، اور تمام خیر خواہوں کا ہمیشہ ان کی محبت اور تعاون کا مشکور رہوں گا۔

میں اپنے جناب انفل ڈاکٹر بشارت حسین (کے اے ایس)، میرے بڑے بھائی جناب شفقت حسین، اور جناب محمد رفیع کا خصوصی شکریہ ادا کرتا ہوں کہ انہوں نے میرے تعلیمی کیریئر کے دوران میری ہر ممکن مدد کی۔

میں اس میڈیم کا استعمال اپنی پیاری ماں اور قابل احترام والد کا اپنی زندگی میں حوصلہ افزائی کے لیے شکریہ ادا کرنے کے لیے کرنا چاہتا ہوں، آپ واقعی میرے پہلے استاد اور میری زندگی میں ایک چمکتی ہوئی روشنی ہیں۔ میرے بھائیوں اور بہنوں کو میرا مخلصانہ احترام، آپ کی حمایت اور صبر کے لیے آپ کا شکریہ۔

بشارت

فہرست مطالب

i	اقرار نامہ
ii	تصدیق نامہ
iii	اظہارِ تشکر
viii	فہرست تصاویر
x	فہرست جداول
1	1 تعارف
1	1.1 ویولیت کا تاریخی پس منظر
2	1.2 شارٹ ٹائم فورئیر ٹرانسفارم
5	1.3 غیر یقینی کا اصول
6	1.4 ملٹی ریزولوشن تجزیہ اور ویولیت ٹرانسفارم کے موضوعہ
11	1.5 ویولیتس کی کچھ مثالیں۔
17	1.6 ویولیتس کی کچھ ایپلی کیشنز
20	1.7 تاخیر (Delay) ڈیفرنشل مساوات
23	1.8 وجود اور انفرادیت
24	1.9 DDEs کو حل کرنے کے طریقے
24	1.9.1 DDEs کو حل کرنے کے اقدامات کا طریقہ
26	1.9.2 لاپلیس ٹرانسفارمیشن کا طریقہ
28	1.10 مقالہ کا مقصد
28	1.11 مقالہ کا خاکہ
29	2 ہار ویولیت طریقہ کے ذریعہ متناسب تاخیر ریکالٹی ڈیفرنشیل مساوات کا تقریبی حل
29	2.1 تعارف

- 31 Haar ویولیٹ بیسز اور اس کا اینگریشن 2.2
- 34 طریقہ کار کی تفصیل 2.3
- 36 Haar ویولیٹ کا کنورجنس تجزیہ 2.3.1
- 36 عددی تجربہ 2.4
- 43 خلاصہ 2.5
- 3 ہار ویولیٹ کا استعمال کرتے ہوئے مناسب تاخیر ڈیر پچلیٹ باؤنڈری ویلیو مسائل کا حل - 44
- 44 تعارف 3.1
- 46 طریقہ کی تعمیر 3.2
- 48 عددی مثالیں 3.3
- 50 نتائج اور مباحث 3.4
- 54 خلاصہ 3.5
- 4 سائیمپلٹینیوس مناسب تاخیر ڈیفرینشیل مساوات کو حل کرنے کے لیے ہار ویولیٹ سیریز کا طریقہ 55
- 55 تعارف 4.1
- 56 طریقہ کار کی تفصیل 4.2
- 57 الگورتھم 4.3
- 58 طریقہ کار پر عمل درآمد 4.4
- 63 خلاصہ 4.5
- 5 الیکٹروڈائنامکس میں پیدا ہونے والی ہائی ترتیب ملٹی پینٹوگراف مساوات کے حل کیلئے ہار ویولیٹ سیریز طریقہ - 64
- 64 پینٹوگراف مساوات 5.1
- 66 طریقہ کی تعمیر 5.2
- 68 عددی تجربہ 5.3
- 76 خلاصہ 5.4
- 6 فریکشنل آرڈر مناسب تاخیر ریگولی ڈیفرینشیل مساوات کو حل کرنے کے لیے ایک کوو لکیشن طریقہ 77

77	تعارف	6.1
82	طریقہ کی تفصیل	6.2
83	اپیلی کیشنز اور عدوی نتائج	6.3
91	خلاصہ	6.4

92 اختتامی کلمات

93 کانفرنس میں شرکت کی فہرست

93 اشاعت کی فہرست

93 کتابیات

فہرست تصاویر

15 (ا) ہارباپ ویولینٹ، (ب) ہارماں ویولینٹ	1.1
15 (ا) ڈونچیز باپ ویولینٹ (db2)، (ب) ڈونچیز ماں ویولینٹ (db2)	1.2
15 (ا) ڈونچیز باپ ویولینٹ (db3)، (ب) ڈونچیز ماں ویولینٹ (db3)	1.3
16 (ا) ڈونچیز باپ ویولینٹ (db4)، (ب) ڈونچیز ماں ویولینٹ (db4)	1.4
16 کپلیکس مورلیٹ ویولینٹ کا حقیقی اور خیالی حصہ	1.5
16 (ا) میٹر باپ ویولینٹ، (ب) میٹر ماں ویولینٹ	1.6
17 (ا) سملیٹ باپ ویولینٹ، (ب) سملیٹ باپ ویولینٹ۔	1.7
17 (ا) کوفلیٹ باپ ویولینٹ، (ب) کوفلیٹ ماں ویولینٹ	1.8
38 $J = 3$ پر عین اور عددی حل کا موازنہ۔	2.1
39 مطلق غلطی (مسئلہ 2) $J = 6$ پر۔	2.3
39 درست اور عددی حل کے درمیان موازنہ (مسئلہ 2)۔	2.2
40 عین اور عددی حل کے درمیان موازنہ (مسئلہ 3)۔	2.4
41 درست اور عددی حل کے درمیان موازنہ (مسئلہ 4)۔	2.5
42 مطلق غلطی (مسئلہ 5) $J = 10$ پر۔	2.7
42 درست اور عددی حل کے درمیان موازنہ (مسئلہ 5)۔	2.6
43 عین اور عددی حل کے درمیان موازنہ (مسئلہ 6)۔	2.8
50 مسئلہ 2 کے لیے پلاٹ $J = 5$ پر	3.2
50 مسئلہ 1 کے لیے پلاٹ $J = 5$ پر	3.1
50 مسئلہ 4 کے لیے پلاٹ $J = 5$ پر	3.4
50 مسئلہ 3 کے لیے پلاٹ $J = 5$ پر	3.3
51 مسئلہ 5 کے لیے پلاٹ $J = 5$ پر	3.5
59 مسئلہ 1 کا درست اور تقریبی حل۔	4.1
60 مسئلہ 2 کا درست اور تقریبی حل۔	4.2

61	مطلق غلطی بمقابلہ J (مسئلہ 2) -	4.4
61	مطلق غلطی بمقابلہ J (مسئلہ 1) -	4.3
62	مسئلہ 3 کا درست اور تقریبی حل -	4.5
62	مطلق غلطی بمقابلہ J (مسئلہ 3) -	4.6
69	درست اور تقریبی حل کا موازنہ (مسئلہ 1) -	5.1
71	عظیم مطلق غلطیاں بمقابلہ J (مسئلہ 2) -	5.3
71	درست اور تقریبی حل کا موازنہ (مسئلہ 2) -	5.2
72	تقریبی اور درست حل کا موازنہ (مسئلہ 3) -	5.4
74	عظیم مطلق غلطیاں بمقابلہ J (مسئلہ 4) -	5.6
74	درست اور تقریبی حل کا موازنہ (مسئلہ 4) -	5.5
75	عظیم مطلق غلطیاں بمقابلہ J (مسئلہ 5) -	5.8
75	درست اور تقریبی حل کا موازنہ (مسئلہ 5) -	5.7
76	عظیم مطلق غلطیاں بمقابلہ J (مسئلہ 6) -	5.10
76	درست اور تقریبی حل کا موازنہ (مسئلہ 6) -	5.9
85	مسئلہ 1 -	6.1
87	مسئلہ 2 -	6.2
88	مسئلہ 3 -	6.3
89	مسئلہ 4 -	6.4
91	ویولیٹ لیول پر مطلق غلطی $J = 4$ (مسئلہ 4) -	6.5

فہرست جداول

37	2.1	J کی مختلف سطحوں پر عظیم مطلق غلطیاں (مسئلہ 1)۔
38	2.2	$J = 3$ کے ساتھ مسئلہ 1 کے لیے عظیم مطلق غلطی۔
39	2.4	J کی مختلف سطحوں پر عظیم مطلق غلطیاں (مسئلہ 4)۔
39	2.3	J کی مختلف سطحوں پر عظیم مطلق غلطیاں (مسئلہ 2)۔
39	2.5	$J = 5$ کے ساتھ مسئلہ 2 کے لیے عظیم مطلق غلطی۔
42	2.7	J کی مختلف سطحوں پر عظیم مطلق غلطیاں (مسئلہ 6)۔
42	2.6	J کی مختلف سطحوں پر عظیم مطلق غلطیاں (مسئلہ 5)۔
51	3.1	مسائل 1 سے 5 کے لیے عظیم مطلق غلطی۔
51	3.2	غلطیوں کا موازنہ۔
52	3.3	کنورجنس کی شرح $R_c = \frac{\log(\frac{\text{error}(J-1)}{\text{error}(J)})}{\log(2)}$ مسائل 1 سے 5 کے لیے۔
52	3.4	$J = 6$ پر تقریب اور درست حل کے درمیان موازنہ۔
52	3.5	$J = 6$ پر تقریب اور درست حل کے درمیان موازنہ۔
53	3.6	$J = 6$ پر تقریب اور درست حل کے درمیان موازنہ۔
53	3.7	$J = 6$ پر تقریب اور درست حل کے درمیان موازنہ۔
53	3.8	$J = 6$ پر تقریب اور درست حل کے درمیان موازنہ۔
60	4.1	J کی مختلف سطحوں پر عظیم مطلق غلطی۔
61	4.2	J کی مختلف سطحوں پر عظیم مطلق غلطی (MAE) (مسئلہ 3)۔
69	5.1	موجودہ طریقہ کے ساتھ موازنہ میں خرابی (مسئلہ 1)۔
70	5.2	درست اور تقریبی حل کا موازنہ (مسئلہ 1)۔
70	5.4	J کی مختلف سطحوں پر عظیم مطلق غلطی (مسئلہ 4)۔

70	J کی مختلف سطحوں پر عظیم مطلق غلطی (مسئلہ 2)۔	5.3
72	درست اور تقریبی حل کا موازنہ (مسئلہ 3)۔	5.5
74	درست اور تقریبی حل کا موازنہ (مسئلہ 4)۔	5.6
74	موجودہ طریقہ کار کے ساتھ خرابی کا موازنہ (مسئلہ 5)۔	5.7
75	درست اور تقریبی حل کا موازنہ (مسئلہ 5)۔	5.8
76	J کی مختلف سطحوں پر عظیم مطلق غلطی (مسئلہ 6)۔	5.10
76	J کی مختلف سطحوں پر عظیم مطلق غلطی (مسئلہ 5)۔	5.9
85	تقریبی حل $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9, 1$ پر جب $J = 3$ (مسئلہ 1)۔	6.1
86	عظیم مطلق غلطی (MAE) $-max y - y_{exact} $	6.2
86	تقریباً حل $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9, 1$ (مسئلہ 2)۔	6.3
88	تقریباً حل $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9, 1$ (مسئلہ 3)۔	6.4
89	تقریباً حل $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9, 1$ (مسئلہ 4)۔	6.5
89	MAE کا موازنہ (مسئلہ 4)۔	6.6
90	HWSM بمقابلہ FDE سولور کا موازنہ [37]۔	6.7

باب 1

تعارف

1.1 ویولیت کا تاریخی پس منظر

ویولیت تھیوری سیمک ڈیٹا کی سگنل پروسیسنگ کے تناظر میں مورلیٹ کی آزاد دریافتوں اور ریاضیاتی تجزیہ میں کالڈرون [21] کے ساتھ ظاہر ہوئی۔ ویولیت کی پہلی مناسب تشکیل 1980 کی دہائی میں زیادہ کثرت سے ظاہر ہونا شروع ہوئی، تاہم، اسی طرح کے خیالات 1910 میں ہنگری کے ریاضی دان الفریڈ ہار کے کام سے مل سکتے ہیں۔ پہلی ویولیت ٹرانسفارم 1910 میں پیدا ہوئی تھی اور اسے ہار فنکشن کا نام دیا گیا تھا۔ اس کی تعریف ایک مختصر منفی پلس کے طور پر کی گئی تھی اس کے بعد ایک مختصر مثبت پلس۔ چند دہائیوں کے بعد، 1946 میں، ڈی. گابرنے ایک ویولیت ایجاد کیا، جس کا طریقہ فورنیر ٹرانسفارمیشن سے بہت ملتا جلتا ہے، جہاں اصول یہ ہے کہ گاوسین فنکشن کے ذریعے بیان کردہ ونڈو کو لاگو کیا جاتا ہے۔ 1980 کی دہائی تک، اسے ہار کے فنکشنز اور ڈی. گابرنے [105, 31] کے فنکشنز کے لیے ویولیت ٹرانسفارمیشن کے بارے میں بات کرنے کا کوئی سوال ہی نہیں تھا۔ لیکن 1982 میں ویولیت کا طریقہ پہلی بار جے مورلیٹ نے متعارف کرایا تھا اور دو سال بعد، گروسمین اور مورلیٹ نے کسی بھی صوابدیدی مربع انٹیگریبل فنکشن کو مستقل شکل کے مربع انٹیگریبل ویولٹس میں ڈیکمپوزیشن کا تصور متعارف کرایا۔ ریاضی میں ویولیت طریقوں کی بنیاد رکھی۔ [43] ویولیت تھیوری کے تناظر میں ایک اور اہم پیشرفت ملٹی ریزولوشن تجزیہ (MRA) ہے، یہ قابل ذکر تکنیک مالت اور میٹر [70] نے تجویز کی ہے اور آر تھوگوئل ویولیت کی بنیاد کی تعمیر کے لیے عمومی رسمیت کی وضاحت کرتی ہے۔ 1987 میں، I. Daubechies نے آر تھوگوئل ویولٹس بنائے، جن کی شناخت ڈوہچیز ویولٹ [28] کے نام سے کی گئی۔ ان کی خصوصیت ان کے صفر لمحات کی تعداد سے ہوتی ہے۔ مزید یہ کہ ویولٹس کے اس فیملی کو مختلف شعبوں میں آسانی سے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ ویولٹ کا طریقہ اپنے اصل ڈومین (سیسمولوجی) میں ایک بہت طاقتور ٹول ہے، اور اس تکنیک کی کارکردگی نے محققین

کی دلچسپی کو مختلف شعبوں، جیسے امیج کمپریشن، میڈیکل امیجنگ، ویڈیو ٹیلی فونی، اور محدود عنصر ماڈلنگ میں نظریہ کو پھیلانے میں ابھارا ہے۔ یہ کام عددی تجزیہ میں ویولیت کے طریقہ کار پر روشنی ڈالتا ہے۔ اس تناظر میں، اس مقالے کا کام بنیادی طور پر ہار ویولیت کو لوکیشن کے طریقہ کار کے لیے وقف ہے جس میں تاخیر کی ڈیفرنشیل مساوات کی ایک خاص کلاس کو حل کیا جاتا ہے جسے سینٹوگراف مساوات کہا جاتا ہے۔ ہار ویولیت سیریز اور تاخیر شدہ ہار ویولیت سیریز کا استعمال انٹیجر اور فریکشن آرڈر کے خطی اور غیر خطی ابتدائی قدر کے مسئلے، باؤنڈری ویلیو کے مسائل، اور مساوات کے نظام کو حل کرنے کے لیے کیا گیا ہے۔ لیکن اس تکنیک کو خاص طور پر دیکھنے سے پہلے، یہ ضروری ہے کہ ویولیت کے طریقہ کار کو اس کی خصوصیات، اس کی پروجیکشن اسپیس اور تعریف، اور موجودہ ویولیت فیملیز کے ساتھ سمجھیں۔

فرانسیسی لفظ "Ondelette" سے ترجمہ شدہ اصطلاح "wavelet" کا مطلب ہے "small wave"۔ ویولی ٹس ٹائم فریکوئنسی ڈومین میں سگنل کا تجزیہ کرنا ممکن بناتے ہیں۔ یہ درست تجزیہ پرجیوی شور کو کم کرنے کے لیے قابل ذکر عناصر کو نکالنا ممکن بناتا ہے اور اس طرح کئی جگہوں پر ٹوٹے ہوئے سگنل کی نمائندگی کرتا ہے۔ جبکہ فوریر ٹرانسفارم ٹرائیکونویٹرک سیریز کے لحاظ سے ایک فنکشن (سگنل) کو ڈیکمپوز کرتا ہے۔ معیاری فوریر ٹرانسفارم کسی فنکشن (سگنل) کی نمائندگی کو متواتر sine اور cosine فنکشنز کے مجموعہ یا اینیگرل کے طور پر بیان کرتا ہے۔ کسی فنکشن کا فوریر ٹرانسفارم ہمیں اس فنکشن کا فریکوئنسی سپیکٹرم فراہم کرتا ہے جو ظاہر کرتا ہے کہ فنکشن (سگنل) میں کیا فریکوئنسی موجود ہے۔ کسی فنکشن کی فوریر ٹرانسفارم کو اس فنکشن کا فوریر سپیکٹرم بھی کہا جاتا ہے [28, 4, 105, 31, 26]۔

1.2 شارٹ ٹائم فوریر ٹرانسفارم

فوریر ٹرانسفارم ایک فنکشن (سگنل) کی فریکوئنسی خصوصیات کا تعین کرنے کے لیے ایک مفید ٹول ہے لیکن اگر فنکشن (سگنل) کی فریکوئنسی وقت کے لحاظ سے مختلف ہوتی ہے تو یہ مناسب نہیں ہے۔ تاہم، یہ بہت پہلے دیکھا گیا تھا کہ گلوبل فوریر ٹرانسفارم کسی فنکشن (سگنل) کی سپیکٹرل معلومات کو کمپیوٹنگ کرنے کے لیے موزوں نہیں ہے کیونکہ اسے ایک ہی فریکوئنسی پر اس کی سپیکٹرل کثافت کا اندازہ کرنے کے لیے

سگنل کے بارے میں تمام سابقہ اور مستقبل کی معلومات کی ضرورت ہوتی ہے۔ اس خرابی کو دور کرنے کے لیے، شارٹ ٹائم فورئیر ٹرانسفارم (STFT) یا ونڈو فورئیر ٹرانسفارم (WFT) متعارف کرایا گیا ہے۔ ایک ونڈو فنکشن کی تعریف غیر سٹیشنری فنکشن (سگنل) کی ٹائم فریکوئنسی لوکلائزیشن کو حاصل کرنے کے لیے کی جاتی ہے۔ ونڈو فنکشن کی چوڑائی سگنل کے اس حصے کے برابر ہونی چاہیے جہاں اسے ساکن سمجھا جا سکتا ہے۔ وقت کے محور کے ساتھ ونڈو فنکشن کو سلائیڈ کر کے فنکشن (سگنل) کی سپیکٹرل معلومات کو حصوں میں متعین کیا جا سکتا ہے۔ ایک بار پھر مسئلہ ونڈو فنکشن کی مقررہ چوڑائی کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے اور اس وجہ سے ویولٹیو ٹرانسفارم عمل میں آتا ہے۔ ویولٹیو کی تکنیکی خصوصیات میں جانے سے پہلے، ہم STFT سے متعلق کچھ ریاضیاتی تعریضیں فراہم کریں گے [4, 105]۔

تعریف 1 ایک غیر معمولی فنکشن $g \in L^2(\mathbb{R})$ کو ونڈو فنکشن کہا جاتا ہے اگر $t * g(t) \in L^2(\mathbb{R})$ یعنی فنکشن تیزی سے صفر تک گر جاتا ہے۔ ونڈو کے فنکشنز کے لیے دو اہم ترین پیرامیٹرز اس کا نصف قطر اور مرکز ہیں۔

تعریف 2 مرکز t^* اور روٹ مین اسکوائر (RMS) نصف قطر، Δg کا ونڈو فنکشن g کے ذریعے بیان کیا گیا ہے۔

$$t^* = \frac{1}{\|g\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |g(t)|^2 dt, \quad (1.1)$$

اور

$$\Delta g = \frac{1}{\|g\|_2^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (t - t^*)^2 |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad (1.2)$$

بالترتیب۔ ونڈو فنکشن g کی چوڑائی $2\Delta g$ ہوگی۔

اسی طرح، ہمارے پاس فریکوئنسی ونڈو $\hat{g}(\omega)$ ہے جس کا مرکز ω^* اور RMS نصف قطر $\Delta \hat{g}$ کے مطابق ہے۔ ڈی گیبر پہلے شخص تھے جنہوں نے فورئیر کے تجزیہ کی خرابی کو محسوس کیا اور ونڈو فنکشن اور مختصر

وقت کے فورئیر ٹرانسفارم (STFT) کا خیال پیش کیا۔ وہ فورئیر ٹرانسفارم اور گاوسین ڈسٹریبیوشن فنکشن کو ملا کر سپیکٹروگرام تیار کرتا ہے جو فریکوئنسی کو وقت کے خلاف پلاٹ کرتا ہے۔ گیبز ٹرانسفارم جسے STFT کے نام سے بھی جانا جاتا ہے اس کے علاوہ کچھ نہیں ہے بلکہ گاوسین ونڈو کے ذریعے وزن والے فنکشن کا فورئیر ٹرانسفارم ہے جو وقت کے ساتھ ساتھ سلائیڈ کر رہا ہے۔ فورئیر ٹرانسفارم کے برعکس، گیبز ٹرانسفارم ایک مخصوص فریکوئنسی جزو کے مقام کے بارے میں بتاتا ہے۔

تعریف 3 ٹائم فریکوئنسی ڈومین (s, ω) میں فنکشن f کی گیبز ٹرانسفارم $G(f)(s, \omega)$ سے ظاہر ہوتی ہے، اور اس کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے

$$G(f)(s, \omega) = \hat{f}_g(s, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t-s)} dt e^{-i\omega t} \quad (1.3)$$

جہاں $g(t) = e^{-(t-s)^2/a^2}$ گاوسین ڈسٹریبیوشن فنکشن ہے۔ g کے سلائیڈنگ عمل کو پیرامیٹر s کا مرکز (ہے) کے ذریعے کنٹرول کیا جاتا ہے، اور پیرامیٹر a فورئیر ٹرانسفارم کے لیے مختصر وقت کی ونڈو کے پھیلاؤ کا تعین کرتا ہے [18]

اگر ہم قریب سے دیکھیں تو گیبز ٹرانسفارم مؤثر طریقے سے فنکشن $g(t)$ کے ساتھ فنکشن (سگنل) $f(t)e^{-i\omega t}$ کا ایک کنولوشن ہے۔

تعریف 4 اگر ایک فنکشن $f \in L^2(\mathbb{R})$ تو معکوسی فارمولہ

$$f(t) = G^{-1}(\hat{f}_g(s, \omega)) = \frac{1}{2\pi \|g\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_g(s, \omega) \overline{g(t-s)} e^{i\omega t} d\omega ds.$$

گیبز ٹرانسفارم کی خصوصیات: فرض کریں $f, g, h \in L^2(\mathbb{R})$ اور c, d کوئی بھی دو صوابدیدی مستقل ہیں۔ پھر

ا. خطیت:

$$G_g[cf + dh](s, \omega) = cG_g f(s, \omega) + dG_g h(s, \omega).$$

ب. ٹائم شفٹ:

$$\begin{aligned} G_g[Tdf](s, \omega) &= G_g[f(t-d)](s, \omega), \\ &= e^{-id\omega} G_g f(s-d, \omega). \end{aligned}$$

پ. اکیسپوننشیل ماڈیولیشن:

$$\begin{aligned} G_g[M_d f](s, \omega) &= G_g[e^{id\omega} f(t)](s, \omega), \\ &= G_g f(t)(s, \omega-d), \\ &= T_d G_f(s, \omega). \end{aligned}$$

ت. کنجوگیشن:

$$G_g f(s, \omega) = \overline{G_g f(s, -\omega)}.$$

1.3 غیر یقینی کا اصول

وقت کی تعدد کے تجزیہ میں ایک بنیادی غیر یقینی اصول ہے جو ایک ہی وقت میں وقت اور فریکوئنسی ڈومینز دونوں میں اعلیٰ ریزولوشن حاصل کرنے کی صلاحیت کو محدود کرتا ہے۔ ہر علاقے میں ہم جس تفصیل کو دیکھ سکتے ہیں اسے بدیہی طور پر ریزولوشن کے طور پر تسلیم کیا جاتا ہے۔ ریزولوشن ونڈو فنکشن کی چوڑائی پر منحصر ہے۔ ایک چھوٹی ونڈو وقت میں اچھی ریزولوشن دیتی ہے لیکن فریکوئنسی ریزولوشن کم دیتی ہے جبکہ ایک بڑی ونڈو مخالف رویے دکھاتی ہے، یعنی اگر ہم فنکشن (سگنل) کے فریکوئنسی مواد کی اعلیٰ ریزولوشن چاہتے ہیں تو ہمیں اس وقت کے ساتھ سمجھوتہ کرنا پڑے گا جس پر فریکوئنسی جزو ہوتا ہے لہذا، وقت اور تعدد کی ایک وقت لوکلائزیشن کے درمیان ہمیشہ تجارت ہوتی ہے۔

تعریف 5 فرض کریں $f \in L^2(\mathbb{R})$ ، پھر f کا پھیلاؤ پوائنٹ $d \in \mathbb{R}$ کے ہے

$$\Delta_d f = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t-d)^2 \|f(t)\|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 dt} \quad (1.4)$$

فریکوئنسی ڈومین میں،

$$\Delta_r \hat{f} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t-d)^2 \|f(t)\|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 dt}. \quad (1.5)$$

تھیوریم (Theorem) 6 (غیر یقینی اصول) فرض کریں $f \in L^2(\mathbb{R})$ میں ایک فنکشن ہے جو $\pm\infty$ پر غائب ہو جاتا ہے۔ پھر

$$\Delta_d f \Delta_r \hat{f} \geq \frac{1}{4}$$

تمام پوائنٹس کے لیے $-d, r \in \mathbb{R}$

بیان کا مطلب ہے کہ $\Delta_d f, \Delta_r \hat{f}$ ایک وقت چھوٹا نہیں ہو سکتا۔ دوسرے الفاظ میں، جب ٹائم فریکوئنسی سیل وقت کے ساتھ تنگ ہوتا ہے تو یہ فریکوئنسی میں وسیع ہوتا ہے اور اس کے برعکس۔ گوسین فنکشن کی صورت میں $f(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma}}$ مساوات حاصل کی جاتی ہے۔

1.4 ملٹی ریزولوشن تجزیہ اور ویولیٹ ٹرانسفارم کے موضوع

ملٹی ریزولوشن تجزیہ (MRA) ویولیٹ تھیوری کا ایک نیا اور قابل ذکر تصور ہے۔ یہ ایک عام فریم ورک فراہم کرتا ہے جس کا استعمال کرتے ہوئے کوئی بھی آر تھوگونل ویولیٹ کی بنیاد پر اپنے فیملی بنا سکتا ہے۔ ایم آراے کے بارے میں ملٹ کا خیال مختلف ریزولوشنز پر کسی فنکشن کو مختلف جگہوں پر پیش کر کے ان کا تقریب لگانا ہے۔

تعریف 7 $L^2(\mathbb{R})$ کا MRA کے نیسٹڈ بند سب اسپیس کی ترتیب $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ پر مشتمل ہے۔ جو مندرجہ ذیل کو مطمئن کرتا ہے۔

$$V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

$$\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j} = L^2(\mathbb{R}), \quad \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}.$$

مزید برآں، ایک فنکشن $f \in L^2(\mathbb{R})$ کے لیے، یہ ضروری ہے کہ

$$f(t) \in V_0 \iff f(2^j t) \in V_j \forall j \in \mathbb{N}, \text{ (invariance to dilation)}$$

-(invariance to translation) کے لیے ایک آر تھونارمل بنیاد ہے $\{\phi(t-k) : k \in \mathbb{Z}\} V_0$ جہاں $\phi(t) \in V_0$ کو اسکیلنگ فنکشن کہا جاتا ہے۔

اس تعریف کا نتیجہ یہ ہے کہ z کی ہر ڈگری پر، فنکشنز کی فیملی $\{\phi_{j,k} : t \rightarrow 2^j \phi(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ L^2 -norm کے حوالے سے V_j کی ایک آر تھونارمل بنیاد بناتا ہے۔ جیسا کہ ϕ کا تعلق V_0 سے ہے، جو V_1 میں شامل ہے، اس کے بعد ϕ کو $\{\phi_{1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ کے خطی مجموعہ کے طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t - k).$$

اس رشتے کا اصول، جسے دوہیمانے پر رشتہ کہا جاتا ہے، ہمیں ایک ملٹی ریزولوشن تجزیہ کے تناظر میں تیزی سے ڈیکمپوزیشن یا ریکانسٹرکشن کے الگورتھم تیار کرنے کی اجازت دیتا ہے۔ لہذا یہ دلچسپ ہے کہ تمام متعلقہ کو فیشنٹس کو دوبارہ شمار کیے بغیر ریزولوشن کی سطح کو بڑھا کر فنکشن کے علم کو بہتر بنانے کے قابل ہونا۔ V_{j+1} میں ایک تفصیلی اسپیس موجود ہے V_j میں $V_{j+1} W_j$ کے آر تھوگونل تکمیل کے طور پر کام کرتا ہے یعنی

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \quad (1.6)$$

اسپیس W_j میں V_{j+1} میں موجود تمام فنکشنز شامل ہیں جو کہ کسی منتخب نارم کے تحت V_j میں موجود تمام فنکشنز کے لیے آر تھوگونل ہیں۔ فنکشنز کا مجموعہ جو W_j کی میسر بناتا ہے اسے ویولٹ کہتے ہیں۔

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{V_{j_0} \oplus \bigoplus_{j=j_0}^{\infty} W_j} \quad (1.7)$$

ایک فنکشن ψ موجود ہے جیسا کہ $\{t \rightarrow \psi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ W_0 کی آر تھونارمل میسر ہے۔ فنکشن ψ کو ویولٹ کہا جاتا ہے۔ نیز، ریزولوشن کی مختلف سطح کے لیے $j \in \mathbb{Z}$ ، فیملی $\{\psi_{j,k} : t \rightarrow 2^{j/2} \psi(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$

W_j اسپیس کی آر تھو نارمل بیسز بناتا ہے۔ مزید برآں، اس حقیقت سے کہ اسپیس $V_1 W_0$ میں شامل ہے، درج ذیل دو پیمانے پر تعلق قائم کیا جا سکتا ہے:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2t - k) \quad (1.8)$$

جہاں $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ حقیقی اعداد کی تو اتر ہے۔ ملٹی ریزولوشن تجزیہ کی ایک سادہ مثال ہار کی ہے، جو اسکیل فنکشن $\phi = \mathbb{1}_{[0,1]}$ اور ویولیٹ $\psi = \mathbb{1}_{[1/2,1]} - \mathbb{1}_{[0,1/2]}$ ، جہاں $\mathbb{1}$ خصوصیات یا اشارے کا فنکشن ہے۔ (7) MRA میں دی گئی $L^2(\mathbb{R})$ اسپیس کے ڈیکمپوزیشن کو استعمال کرتے ہوئے کوئی بھی یہ اندازہ لگا سکتا ہے کہ $f \in L^2(\mathbb{R})$ کو اس طرح لکھا جاتا ہے:

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j_0, k} \phi_{j_0, k} + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j, k} \psi_{j, k},$$

جہاں $\alpha_{j_0, k} = \int f \phi_{j_0, k}$ اور $\beta_{j_0, k} = \int f \psi_{j_0, k}$ ویولیٹ ڈیکمپوزیشن سگنل تجزیہ میں ایک وسیع پیمانے پر استعمال شدہ طریقہ ہے۔ اس کا بنیادی فائدہ وقت کے ساتھ سگنل کی فریکوئنسی مواد کے ارتقاء کا تجزیہ کرنا ہے۔ اس لیے یہ غیر سٹیشنری سگنلز کے تجزیہ کے لیے فورئیر ٹرانسفارمز سے زیادہ موزوں ہے۔ ریاضی میں، ایک ویولیٹ ψ بلبرٹ اسپیس $L^2(\mathbb{R})$ کا ایک سمبیل مربع فنکشن ہے، جس میں زیادہ تر وقت ایک دوغلی ارتقا اور صفر اوسط ہوتا ہے۔ اس فنکشن کو اکثر کثیر پیمانے پر تجزیہ اور ریکانسٹرکشن کے آلے کے طور پر منتخب کیا جاتا ہے اور ویولیٹ طریقہ استعمال کرتے ہوئے بہت سے مسائل حل کیے گئے ہیں۔ اس فنکشن ψ کو ویولیٹ کہا جاتا ہے اگر یہ فریکوئنسی ڈومین میں درج ذیل قابل قبول شرط کو پورا کرتا ہے:

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_{\mathbb{R}^-} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty$$

نوٹ کریں کہ $\hat{\psi}$ کی فورئیر ٹرانسفارم کو ظاہر کرتا ہے۔ یہ اس حالت کی طرف جاتا ہے کہ ویولیٹ میں صفر اینیگرل ہے:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0.$$

اس شرط سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ψ کے پاس صفر لمحہ ختم ہو رہا ہے۔ نیز، ψ صفر لمحہ تسلیم کرتا ہے اگر:

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t) dt = 0., \text{ where } k = 0, 1, \dots, k$$

تعریف 8 ψ کے ٹرانسلیشن اور ڈائلیشن سے پیدا ہونے والے ویولیٹ کی ایک ڈبل انڈیکس فیملی ہے:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (1.9)$$

تعریف 9 فنکشن (سگنل) کی مسلسل ویولیٹ ٹرانسفارم f کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے:

$$\mathfrak{E}_{\psi}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt. \quad (1.10)$$

جہاں " a " کو اسکیل فیکٹر کہا جاتا ہے اور سگنل فریکوئنسی کے معکوس کی نمائندگی کرتا ہے، " b " ایک وقتی ٹرانسلیشن کی اصطلاح ہے اور فنکشن ϕ کو مدرو ویولیٹ کہا جاتا ہے۔ مدرو ویولیٹ کمپیکٹ سپورٹ کے ساتھ مسلسل اور ڈیفرنشبل ہوتا ہے۔ اور پچھلے فارمولے میں پیرامیٹرز a اور b کو ڈسکریٹائز کر کے ڈسکریٹ ویولیٹ ٹرانسفارم کی وضاحت کرنا بھی ممکن ہے۔ اس کے لیے فرض کریں۔ جہاں $a = a_0^j$ اور $a_0 > 1$ اور $j \in \mathbb{N}$ اور فرض کریں $b = kb_0 a_0^j$ جہاں $k \in \mathbb{N}$ اور $b_0 > 0$ ہے۔ نام نہاد ڈائڈک ویولیٹ ٹرانسفارم پر غور کرنا بہت عام ہے جو اس معاملے سے مماثل ہے جہاں $a_0 = 2$ اور $b_0 = 1$ ہے، جو ویولیٹ کے درج ذیل فیملی کو ترتیب دیتا ہے۔

$$\psi_{j,k} = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k)$$

اس معاملے میں $j = 1, 2, \dots, n$ جہاں n سگنل بنانے والے پوائنٹس کی تعداد کا بیس 2 لاگر تھم ہے اور $k = 1, 2, \dots, 2^{j-1}$ ہے۔ $L^2(\mathbb{R})$ کے لیے آر تھونارمل بیسز بناتا ہے۔ یعنی۔ $L^2(\mathbb{R})$ سے تعلق

رکھنے والا کوئی بھی فنکشن f اس طرح لکھا جاتا ہے:

$$f(t) = \sum_{j,k} a_{j,k} \psi_{j,k}(t).$$

جہاں $-a_{jk} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$

تعریف 10 ڈائڈک ڈسکریٹ ویولیت ٹرانسفارم اس طرح لکھا جاتا ہے:

$$C_{j,k} = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(2^{-j}t - k) dt \quad (1.11)$$

جہاں j ڈیکمپوزیشن کی سطح (یا پیمانہ) ہے اور k وقت کا وقفہ ہے۔ ڈسکریٹ ویولیت ٹرانسفارم مسلسل ورژن سے زیادہ تیز ہے جبکہ اب بھی انورس ٹرانسفارم کے ذریعے ابتدائی سگنل کی درست ریکانسٹرکشن کی اجازت دیتا ہے۔

تعریف 11 انورس ویولیت ٹرانسفارم ہے۔

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{E}_\psi(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dadb}{a^2}. \quad (1.12)$$

جہاں

$$C_\psi = \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega.$$

ویولیت ٹرانسفارم کی مختلف خصوصیات:

فرض کریں کہ ψ_1 اور ψ_2 ویولیت ہیں اور $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ ہے۔ پھر:

ا. لائنیریٹی:

$$\mathfrak{E}_\psi(a, b)[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] = \alpha_1 \mathfrak{E}_\psi(a, b)[f_1(t)] + \alpha_2 \mathfrak{E}_\psi(a, b)[f_2(t)]$$

جہاں $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

ب. ٹائم شفٹ:

$$\mathfrak{E}_\psi(a, b)(T_\beta f(t)) = \mathfrak{E}_\psi(a, b - \beta)f(t),$$

جہاں T_β ٹرانسلیشن آپریٹر ہے جس کی تعریف: $T_\beta f(t) = f(t - c)$.

پ. ڈائیلیشن:

$$\mathfrak{E}_\psi(a, b)(D_d f(t)) = \frac{1}{\sqrt{d}} \mathfrak{E}_\psi\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right), d > 0,$$

جہاں D_d ڈائیلیشن آپریٹر ہے جس کی تعریف: $D_d f(t) = \frac{1}{d} f\left(\frac{t}{d}\right), d > 0$.

ت. سمٹری:

$$\mathfrak{E}_\psi(a, b)f(t) = \overline{\mathfrak{E}_\psi\left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}\right)}, a \neq 0.$$

ٹ. پیریٹی:

$$C_{P\psi}(a, b)pf(t) = \mathfrak{E}(a, -b)f(t),$$

جہاں P پیریٹی آپریٹر ہے جس کی تعریف: $Pf(t) = f(-t)$.

ث. اینٹی لائنیریٹی

$$\mathfrak{E}_{(\alpha_1\psi + \alpha_2\phi)}(a, b)f(t) = \overline{\alpha_1} \mathfrak{E}_\psi(a, b)f(t) + \overline{\alpha_2} \mathfrak{E}_\phi(a, b)f(t).$$

$$\mathfrak{E}_{T_\beta\psi}(a, b)f(t) = \mathfrak{E}_\psi(a, b + \beta a)f(t). \text{ ج.}$$

$$\mathfrak{E}_{D_d\psi}(a, b)f(t) = \frac{1}{\sqrt{d}} \mathfrak{E}_\psi(ad, b)f(t), d > 0. \text{ چ.}$$

1.5 ویولٹس کی کچھ مثالیں۔

ویولٹس کے سب سے مشہور اور سب سے زیادہ استعمال ہونے والے فیملی ڈیویجیجز، ہار، مورلیٹ، میٹر، سمیلیٹس اور کوفلیٹس کے ویولٹس ہیں۔ یہاں ہم ان ویولٹس خاندانوں کی کچھ خصوصیات پر تبادلہ خیال کرتے ہیں۔ کچھ عام ویولٹس کے بارے میں جامع تفصیل [52, 74, 28] میں مل سکتی ہے۔

ا. ڈوہیچیز ویولیٹ: ای۔ ڈوہیچیز کو یہ اعزاز حاصل ہے کہ انہوں نے انتہائی خوبصورت ویولیٹ فنکشن تخلیق کیا جو آج ویولیٹ اپیلی کیشنز کا سنگ بنیاد بن گیا ہے۔ ویولیٹس کے ڈوہیچیز فیملی مسلسل اور ڈیفرنشیل ہوتے ہیں، اور انہیں کمپیکٹ سپورٹ حاصل ہے۔ یہ ویولیٹس خاص طور پر سگنل اور ایچ پروسیسنگ میں بنیادی فنکشنز کے طور پر استعمال ہوتے ہیں اور ریزولوشن کی مختلف سطحوں پر فنکشنز کی نمائندگی کرنا ممکن بناتے ہیں۔ ڈوہیچیز ویولیٹ میں بند تجزیاتی شکل نہیں ہوتی، صرف تعریفی نکات پر کو فیشنٹس معلوم ہوتے ہیں۔ ڈوہیچیز ویولیٹ اسکیلنگ فنکشن ϕ کی تعریف کا کمپیکٹ ڈومین ہے $[0, 2N - 1]$ ۔ یعنی ϕ ڈومین سے باہر صفر ہے جبکہ متعلقہ ویولیٹ فنکشن ψ کا کمپیکٹ ڈومین ہے $[1 - N, N]$ جہاں N غائب ہونے والے لمحات کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے اور $2N$ ڈوہیچیز ویولیٹ کا آرڈر ہے۔ یا ڈوہیچیز فلٹر کو فیشنٹس کی تعداد ہے۔ دو اشارے D_{2N} یا Db_{2N} کو ڈوہیچیز ویولیٹ کا حوالہ دینے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ ویولیٹ سیمیٹرک نہیں ہیں سوائے $N = 1$ ، جو کہ ہار ویولیٹ ہے۔ ان ویولیٹس کی ہماری N کی قدر کے ساتھ بڑھتی ہے۔ پہلے چند ڈوہیچیز ویولیٹ کے والد اور ماں کے ویولیٹس کو نیچے کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔

ب. ہار ویولیٹ: ہار ویولیٹ ویولیٹ کی سب سے آسان قسم ہے۔ ہار ویولیٹ ٹرانسفارم دیگر تمام ویولیٹ ٹرانسفارمز کے پروٹوٹائپ کے طور پر کام کرتا ہے۔ ڈسکریٹ شکل میں، ہار ویولیٹ ایک ریاضیاتی آپریشن سے متعلق ہیں جسے ہار ویولیٹ ٹرانسفارم کہتے ہیں۔ یہ ایک ڈسکریٹ سگنل کو اپنی نصف لمبائی کے ذیلی سگنلز میں تحلیل کرتا ہے۔ یہ تصوراتی طور پر آسان، کمپیوٹیشنل طور پر تیز، اور میموری کو موثر ہے۔ ایک اور فائدہ یہ ہے کہ یہ کنارے کے اثرات کے بغیر بالکل الٹنے والا ہے۔ ہار ویولیٹ میں کچھ ریاضیاتی خصوصیات ہیں جیسے کوپیکٹ سپورٹ، آرٹھوگونالٹی، اور $L^2(\mathbb{R})$ space کے لیے میسز کی تشکیل کرنا ہے۔ میسز اسکیلنگ فنکشن اور مادر ویولیٹ کے ٹرنسلیشن اور ڈائلیشن سے بنتے ہیں۔ ہار ویولیٹ 1 آرڈر کا ڈوہیچیز ویولیٹ ہے، جو صفر ختم ہونے والے لمحے کو تسلیم کرتا ہے اور اس میں ڈسکریٹ نیوٹی ہے۔ اسکیلنگ فنکشن اور مادر ویولیٹ کا گراف تصویر میں دکھایا گیا ہے۔

پ. مورلیٹ ویولیٹ: مورلیٹ ویولیٹ فیملی کے لیے مادر ویولیٹ حقیقی اور کمپلیکس دونوں شکلوں میں موجود ہے۔ ان میں سب سے زیادہ استعمال ہونے والا کمپلیکس مورلیٹ ویولیٹ ہے جو بنیادی

طور پر ایک ماڈیولٹیڈ گائوسین ہے۔ کمپلیکس مورلیٹ ویولٹیڈ کے لئے ریاضیاتی عبارت ہے:

$$\psi_M(t) = e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_0^2}} + \epsilon(t).$$

اور $\psi_M(t)$ کا فوریر ٹرانسفارم

$$\hat{\psi}_M(\omega) = \sigma_0 e^{-\frac{[(\omega-\omega_0)\sigma_0]^2}{2}} + \hat{\epsilon}(\omega)$$

جہاں، ω_0 ماڈیولیشن فریکوئنسی کی نمائندگی کرتا ہے اور σ_0 گائوسین کی چوڑائی کو ظاہر کرتا ہے۔ اوپر بیان کردہ فنکشن $\psi_M(t)$ میں پہلی اصطلاح قابل قبول شرط کو پورا نہیں کرتی اس لیے ایک اضافی اصطلاح $\epsilon(t)$ شامل کی گئی ہے۔ تاہم بڑے ω_0 (یعنی $\omega_0 > 5$) کے لیے، یہ اضافی اصطلاح، جو گائوسین قسم کی بھی ہے، عددی طور پر نہ ہونے کے برابر ہے (10^{-5} سے کم) اور اس لیے اسے نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ ہار ویولٹیڈ فیملی کے برعکس، مورلیٹ ویولٹیڈ فیملی آرٹھوگونل نہیں ہے اور اس میں کمپیکٹ سپورٹ نہیں ہے۔ اس کے علاوہ، ان کی زیادہ سے زیادہ توانائی مبداء کے ارد گرد ایک تنگ بینڈ کے اندر ہے۔ مورلیٹ ویولٹیڈ کی دو نمایاں خصوصیات ان کی ہم آہنگی کی نوعیت ہیں اور ان کا ایک بند واضح ریاضیاتی عبارت ہے۔ یہ ویولٹیڈ سگنل تجزیہ، مینیکل فالٹ کی تشخیص، اور ماحولیاتی نمونوں کا پتہ لگانے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔

ت. میٹر ویولٹیڈ: یہ ویولٹیڈ سب سے پہلے ایک فرانسیسی ریاضی دان میٹر نے متعارف کرایا تھا۔ اس نے لامحدود سپورٹ کے ساتھ ایک آرٹھوگونل ویولٹیڈ فیملی تیار کی، اور لامحدود طور پر ڈیفرنشیل ہے۔ فوریر ڈومین میں میٹر اسکیلنگ فنکشن $M(\omega)$ کے بند عبارت:

$$\hat{M}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \text{if } |\omega| \leq \frac{2\pi}{3}, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\left(\frac{2|\omega|}{2\pi} - 1\right)\right) & \text{if } \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.13)$$

اس کے نتیجے میں، فوریئر ڈومین میں میٹر ویولیٹ فنکشن ہے۔

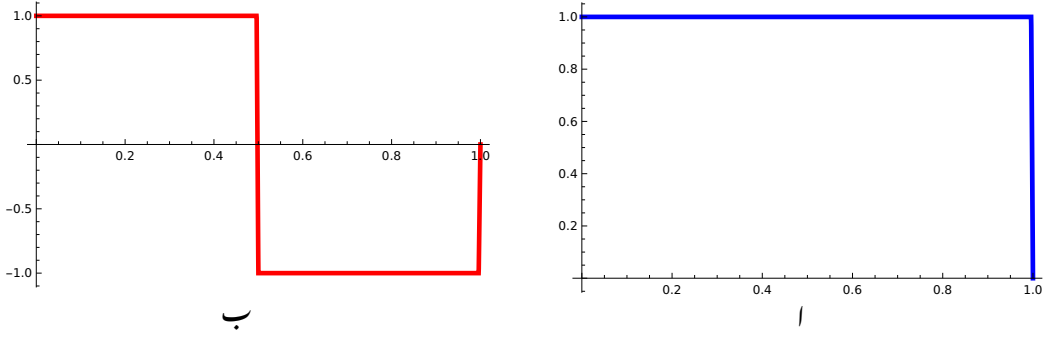
$$\hat{W}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < |\omega| \leq \frac{2\pi}{3}, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin\left(\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3|\omega|}{2\pi} - 1\right)\right) e^{-i\frac{\omega}{2}} & \text{if } \frac{2\pi}{3} < |\omega| \leq \frac{4\pi}{3}, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3|\omega|}{2\pi} - 1\right)\right) e^{-i\frac{\omega}{2}} & \text{if } \frac{4\pi}{3} < |\omega| \leq \frac{8\pi}{3}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.14)$$

جہاں معاون فنکشن ν ہموار فنکشن ہے جو مندرجہ ذیل ہے۔

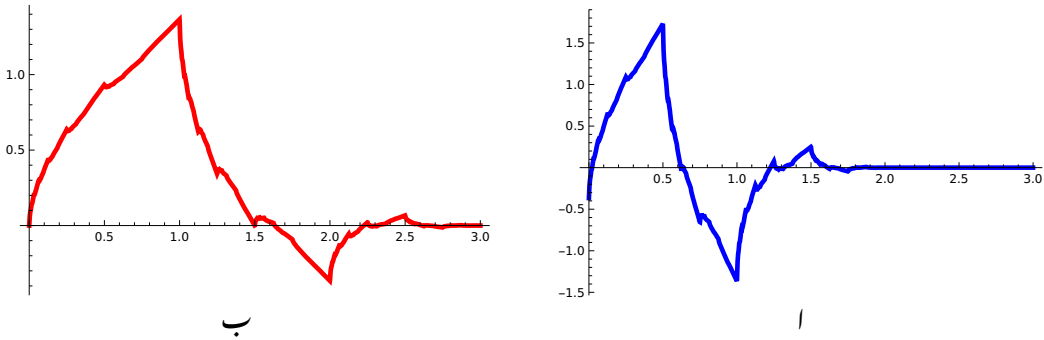
$$\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ x & \text{if } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{if } x > 1 \end{cases} \quad (1.15)$$

مختلف معاون فنکشن کا انتخاب کر کے ہم میٹر ویولیٹ کی مختلف شکلیں حاصل کر سکتے ہیں۔ مزید برآں، \hat{M} اور \hat{W} فریکوئنسی ڈومین میں مستقل طور پر معاونت کی جاتی ہے۔

ٹ. سیمپلس ویولیٹ: سیمپلس ڈیٹا کی طرف سے تجویز کردہ ڈیٹا ویولیٹ کا ایک ترمیم شدہ ورژن ہے اور ڈیٹا ویولیٹ سے زیادہ ہم آہنگ ہیں۔ اس کی ہم آہنگی خاصیت کنارے کے اثرات کو کم کرنے میں مفید ہے۔ سیمپلس کے فیملی کو پیکٹ سپورٹ رکھتا ہے اور آرٹھوگونل سیٹ ہوتا ہے۔ ایک سیمپلس باپ ویولیٹ اور اسی طرح کی ماں ویولیٹ کو تصویر میں دکھایا گیا ہے۔

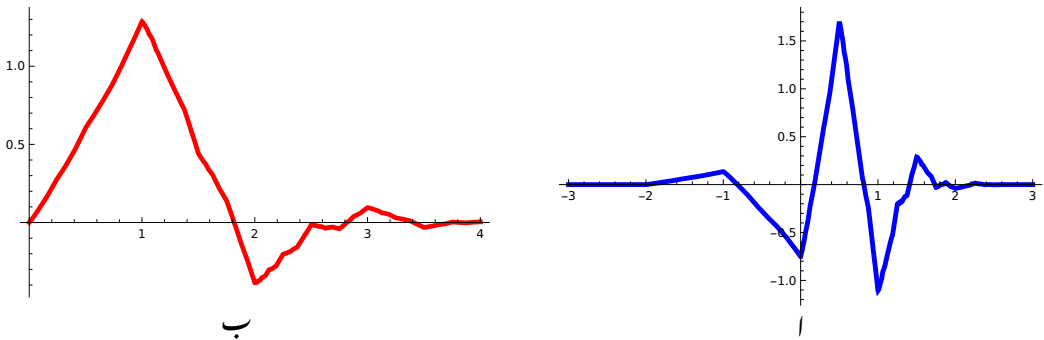


تصویر 1.1: (a) ہارباپ ویولیٹ، (b) ہارماں ویولیٹ

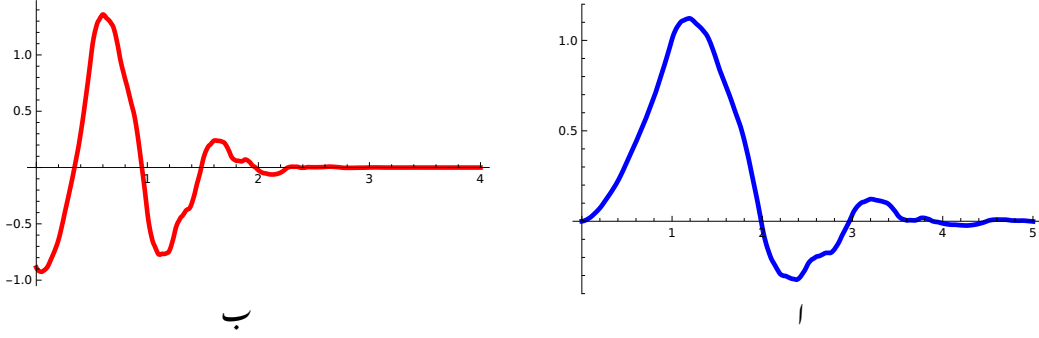


تصویر 1.2: (a) ڈوہیچز باپ ویولیٹ (db2)، (b) ڈوہیچز ماں ویولیٹ (db2)

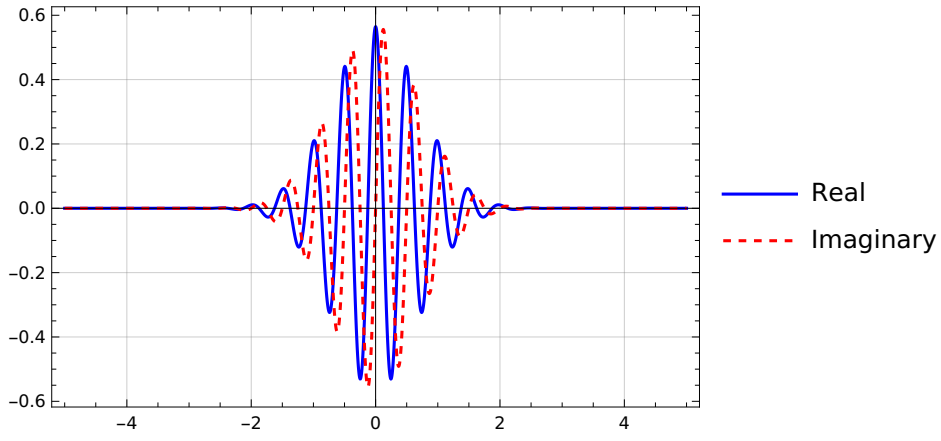
ث. آر تھوگونل پولینامینلز کا استعمال کر کے تیار کردہ ویولیٹ: متعدد آر تھوگونل کثیر رکنی (polynomials) کو بھی ویولیٹ فیملیز کی تعمیر کے لیے استعمال کیا گیا ہے جیسے کہ چبیشیف، ہرمانٹ، لیگینڈر، برنولی، لگورے، جیکوبی، لیگن باؤر، لوکاس، ٹائلر، چیلشکوف، جینوچی ویولیٹ۔



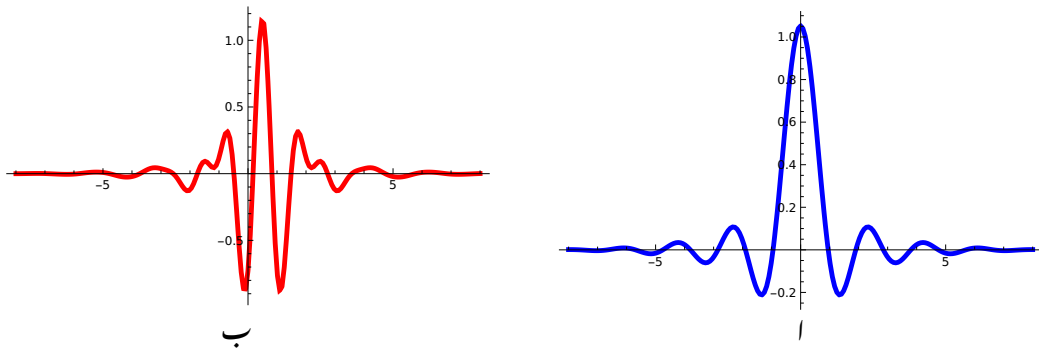
تصویر 1.3: (a) ڈوہیچز باپ ویولیٹ (db3)، (b) ڈوہیچز ماں ویولیٹ (db3)



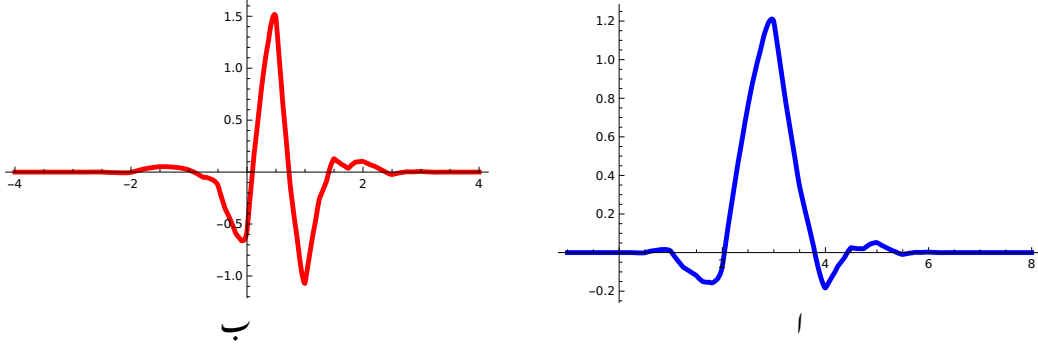
تصویر 1.4: (a) ڈیڈ پیجز باپ ویولیٹ (db4)، (ب) ڈیڈ پیجز ماں ویولیٹ (db4)



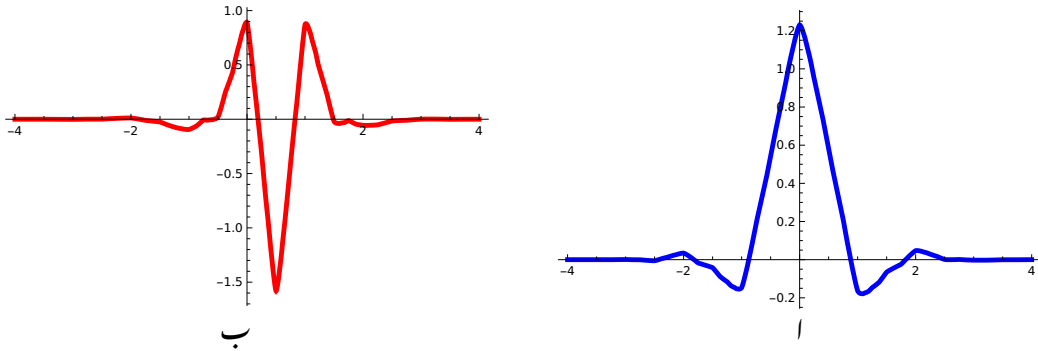
تصویر 1.5: کیپلیکس مورلیٹ ویولیٹ کا حقیقی اور خیالی حصہ



تصویر 1.6: (a) بیئر باپ ویولیٹ، (ب) بیئر ماں ویولیٹ



تصویر 1.7: (ا) سملیٹ باپ ویولیٹ، (ب) سملیٹ باپ ویولیٹ۔



تصویر 1.8: (ا) کوفلیٹ باپ ویولیٹ، (ب) کوفلیٹ ماں ویولیٹ

1.6 ویولیٹس کی کچھ ایپلی کیشنز

ویولیٹ کا طریقہ 19 ویں صدی میں سگنل کے تجزیہ اور پروسیسنگ کو بہتر بنانے کے مقصد سے بنایا گیا تھا۔ اس تکنیک کا بنیادی مقصد حقیقی دنیا میں پیدا ہونے والے سگنلز کی خصوصیت، شناخت، کمپریس، فلٹر، ٹرانسمٹ، پمپن گونی کے لیے بیان کرنا ہے۔ اس تکنیک سے بہت پہلے، اس عمل کے لیے فوریئر ٹرانسفارمیشن (1822) (FT) کا استعمال کیا گیا تھا۔ FT سگنل کو نام نہاد \sin اور \cos سگنلز کے ایک سیٹ میں تحلیل کرتا ہے۔ معلوم ہوا کہ یہ طریقہ تسلی بخش ڈیکمپوزیشن نہیں دیتا ہے۔ ویولیٹ کے پاس فزکس، انجینئرنگ، ریاضی، اور کئی دیگر اطلاقی سائنس کے شعبوں میں بہت سے ایپلی کیشنز ہیں۔ اس حصے میں ہم نے متعدد فیلڈ میں ویولیٹ ٹرانسفارم کے چند ایپلی کیشنز پر تبادلہ خیال کیا ہے۔

۱۔ طبیعیات میں ایپلی کیشنز: ویولیٹ کو نئی نسل کے میوزک سنتھیسائزرز کی نشوونما، تقریر کے تجزیہ میں فارمینٹ کا پتہ لگانے اور پانی کے اندر صوتی لہروں کی ٹرین کے مطالعہ میں بڑے پیمانے پر استعمال

کیا گیا ہے۔ جیو فزکس اور فلکی طبیعیات: اس کا اطلاق تیل کی تلاش میں مائیکرو زلزلوں کا پتہ لگانے اور تجزیہ کرنے، ثقلیات میں مقامی کشش ثقل کے میدان کے تجزیے، سیمولوجی، جیو میگنیٹزم، فلکیات، ہیلو-کلائمٹولوجی وغیرہ میں کیا گیا ہے۔ یہ ہنگامہ سیالوں میں جڑے ڈھانچے کی شناخت میں استعمال کیا گیا ہے، کافی-محدود مجموعوں، درختوں کی نشوونما کے مظہر۔ اس میں اٹامک فزکس میں ایپلی کیشنز ہیں جہاں لیزر ایٹم کے تعامل کے دوران پیدا ہونے والے اعلیٰ ترتیب والے ہارمونکس کے تجزیہ کے لیے یولیٹ ٹرانسفارمز کا اطلاق ہوتا ہے۔ یولیٹ ٹرانسفارمز کو NMR سپیکٹرو سکوپ میں شور فلٹرنگ اور سپیکٹریل لائن کو گھٹانے کے لیے موثر ٹولز کے طور پر استعمال کیا گیا ہے۔ LIGO اور VIRGO تجربات کے ذریعے گریوٹیشنل لہروں کا پتہ لگانا یولیٹ کا ایک شاندار حالیہ استعمال تھا۔ LIGO سیٹ اپ بالترتیب Hanford, WA اور Livingstone, LA میں واقع دو انٹرفیوٹر پر مشتمل ہے، جبکہ VIRGO انٹرفیوٹر سینٹو سیٹیفانو اے میکراٹا، پيسا، اٹلی میں واقع ہے۔ ان میں سے ہر ایک نے دو بلیک ہولز کے اتحاد کے دوسرے حصے کے آخری حصے کے دوران پیدا ہونے والی کشش ثقل کی لہروں کے مطابق ایک سگنل ریکارڈ کیا۔ ان کشش ثقل کی لہروں کی موجودگی کی تصدیق یولیٹ و یولیٹ کے ذریعے غیر سٹیشنری ڈیٹا کے تجزیے کے ذریعے کی جاتی ہے۔ طبیعیات میں اس ترقی نے عمومی اضافیت کی مختلف پیشن گوئیوں کی تصدیق کی ہے۔ ابھی حال ہی میں، LIGO-VIRGO ڈیٹیکٹر نے سرپل گھومنے والے بانٹری نظام کے دو نیوٹران ستاروں سے کشش ثقل کی لہروں اور برقی مقناطیسی لہروں کے یک وقت اخراج کا مشاہدہ کیا۔ اس سے ماخذ کا پتہ لگانا اور اس کے فاصلے کا اندازہ لگانا ممکن ہو جاتا ہے۔ یہاں بھی، مظاہر کا پتہ لگانے اور ماڈلنگ ایک یولیٹ تجزیہ کے ذریعے حاصل کی جاتی ہے۔ ماہرین کے مطابق یہ نتائج بنیادی ہیں اور فلکی طبیعیات اور کاسمولوجی میں ایک نئے دور کا آغاز کرتے ہیں۔

ب۔ طب اور حیاتیات میں ایپلی کیشنز:

طبی اور حیاتیاتی ایپلی کیشنز میں، یولیٹ کا استعمال الیکٹروکارڈیوگرامس کا تجزیہ کرنے کے لیے کیا گیا ہے (مثال کے طور پر ایٹریل فبریلیشن کی پیشن گوئی، پتہ لگانے، اور درجہ بندی میں)، الیکٹرو اینسفلوگرامس، دماغ کے ٹیومر کا پتہ لگانے، اور اسامائینٹاؤں کے پیش رو کا پتہ لگانے (مثال کے طور پر مرگی)۔ یولیٹ ٹرانسفارمز کا استعمال کرتے ہوئے ڈی این اے کی ترتیب میں طویل فاصلے کے ارتباط کا بھی مطالعہ

کیا جاتا ہے۔ نیوکلیئر میگنیٹک ریزوننس اسپیکٹروسکوپ (NMR) میں، یولیٹ ٹرانسفارمز کو عام طور پر سپیکٹرل لائنوں کا اندازہ لگانے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

پ۔ صنعتی ایپلی کیشنز: صنعتی ایپلی کیشنز کے لحاظ سے، یولیٹ کو نیوکلیئر اور برقی پاور پلانٹس کی نگرانی میں استعمال کیا گیا ہے۔ نیوکلیئر پاور پلانٹ (NPP) ایک پیچیدہ نظام ہے جس میں مختلف طبعی رویوں کے ساتھ بڑی تعداد میں اجزاء ہوتے ہیں۔ NPP مسلسل مختلف آپریشنل حالات میں مختلف سگنل خارج کرتا ہے۔ ان سگنلز میں قیمتی معلومات ہوتی ہیں جن کا تجزیہ پلانٹ کی حفاظت کے لیے کرنا پڑتا ہے۔ ان سگنلز سے معلومات نکالنے کے لیے، یولیٹ تھیوری کو سگنل پروسیسنگ کے لیے لاگو کیا جاتا ہے۔ یولیٹ کا ایک اور اطلاق آجیکٹ شیپ ریلیکیشن سسٹم ہے، جو روبوٹکس اور آٹوموبائل انڈسٹری میں کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔

ت۔ ریاضی میں ایپلی کیشنز: یولیٹ ٹرانسفارمز کو واحد اور فاسد ڈھانچے کا پتہ لگانے اور تجزیہ کرنے کے لیے ایک موثر ریاضیاتی ٹول سمجھا جاتا ہے، موثر ہولڈر ایکسپوننٹ کا تخمینہ لگاتا ہے، انٹیگر اور فیکشنل آرڈر، اپروکسیمیشن تھیوری، آپریٹر تھیوری اور انورس مسائل کو حل کرنے میں۔ ویلیٹ تھیوری پر بنی عددی طریقوں نے پچھلی دو دہائیوں کے دوران مختلف شعبوں میں ترقی کی ہے۔ تعمیراتی الگورتھم کی بنیاد پر کچھ ویلیٹ پر بنی تکنیکیں ہیں ویلیٹ ویڈ ریڈیول طریقہ، ویلیٹ فائنٹ ایلیمنٹ میتھڈ، ویلیٹ باؤنڈری ایلیمنٹ، ویلیٹ میٹھ لیس طریقہ وغیرہ۔

ٹ۔ فصل سائنس اور پودوں: ویلیٹ تکنیک کو پودوں کی ٹائم سیریز کی جانچ کرنے کے لئے بڑے پیمانے پر استعمال کیا گیا ہے۔ پیشن گوئی کے معیار کو بہتر بنانے اور زمین کی تبدیلی کے ساتھ فصل کی فینولوجی کا پتہ لگانے کے لیے کئی تکنیکیں تیار کی گئی ہیں۔ ویلیٹ ٹرانسفارمز دور سے محسوس کردہ ڈیٹا کی پروسیسنگ میں موثر کردار ادا کرتا ہے۔ ریموٹ سینسنگ ایک ایسی تکنیک ہے جو سینسرز کا استعمال کرتے ہوئے اشیاء (زیادہ تر زمین کی سطح) کے بارے میں معلومات اکٹھا کرتی ہے بغیر ان کے ساتھ جسمانی رابطہ کئے۔ یہ ڈیٹا آلودہ ہے اور اس کا براہ راست تجزیہ کرنا بہت مشکل ہے۔

لہذا، ڈیٹا کی پروسیسنگ جس میں کمپریشن، شور میں کمی، درجہ بندی، خصوصیت نکالنے کی ضرورت ہے اور ویولٹیٹ ٹرانسفارم کا استعمال کرتے ہوئے موثر طریقے سے کیا جا سکتا ہے۔

ث۔ مصنوعی ذہانت میں ایپلی کیشنز: بہت سی مصنوعی ذہانت کی تکنیکوں کو ہائپر ڈاڈل بنانے کے لیے ویولٹیٹ ٹرانسفارم کے ساتھ ملایا جاتا ہے تاکہ ہائپرولوجی میں اہم عمل کی پیشین گوئی کی جا سکے جیسے کہ: تخمینہ اور بارش کی پیشین گوئی، بارش کے بہاؤ کے عمل کی وجہ سے ندی کے بہاؤ کی پیشین گوئی، بارش کے بہاؤ کی ماڈلنگ، معطل شدہ تلچھٹ کی پیشین گوئی آبی ذخائر میں ہنگامہ خیزی اور بہت سے ہائپرولوجی کلائمیٹولوجک ایپلی کیشنز۔ مشین کی سطحوں کی ساخت کی شناخت کے لیے ویولٹیٹ کو بہت سی مصنوعی تکنیکوں میں بھی استعمال کیا گیا ہے۔ بناوٹ کے تجزیہ کے ماڈل مینوفیکچرنگ صنعتوں میں بہت اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ اس کا استعمال ساخت کا مطالعہ کرنے کے لیے کیا جاتا ہے اور اسے چھوٹے بغیر جزو کی کھروری کا اندازہ لگایا جاتا ہے۔ اس ماڈلنگ میں ویولٹیٹ کا کردار مسلسل 2D ویولٹیٹ ٹرانسفارم کا استعمال کرتے ہوئے ذیلی تقسیم امیجز کو گرے اسکیل میں تبدیل کر کے پہلے سے پروسیس کرنا ہے۔ متعدد شماریاتی خصوصیات (میان، میڈین، زیادہ سے زیادہ، کم سے کم، رینج، معیاری انحراف، پرمیوٹیشن اینٹروپی، انرجی، شینن اینٹروپی، $L1$ نارم، $L2$ نارم، زیادہ سے زیادہ نارم، زیادہ سے زیادہ نارم، زیادہ سے زیادہ نارم) سے اینٹروپی تناسب، لاگ انرجی اینٹروپی، تھریشلڈ اینٹروپی، تھریشلڈ اینٹروپی، اینٹروپی، زیادہ سے زیادہ رشتہ دار توانائی) کو ویولٹیٹ گٹانک سے شمار کیا جاتا ہے۔ ویولٹیٹ ٹرانسفارم کو مصنوعی نیورل نیٹ ورک کے ساتھ جوڑا گیا ہے تاکہ بجلی کی طلب کی پیشین گوئیوں کے لیے ذہین ماڈل تیار کیا جا سکے۔ تھیوری آف ویولٹیٹ کا ڈھانچہ صحت کی نگرانی کی تکنیک میں اطلاق ہوتا ہے۔ اس تکنیک میں غیر تباہ کن سینسر ٹیکنالوجی کا استعمال ڈھانچے میں خرابی اور انخطاط کا پتہ لگانے کے لیے کیا جاتا ہے۔ سینسر کے ذریعہ موصول ہونے والے سگنل کو ویولٹیٹ کا استعمال کرتے ہوئے موثر طریقے سے پروسیس کیا جاتا ہے جس سے ساخت کی صحت کی حالت دیکھی جا سکتی ہے۔

1.7 تاخیر (Delay) ڈیفرنشل مساوات

عام طور پر، محققین ریاضی کے ایسے ماڈل بناتے ہیں جو ڈیفرنشل مساوات کے ذریعے بیان کیے جاتے ہیں جس میں نظام کی موجودہ حالت صرف منحصر متغیر کی موجودہ قدر اور/یا ان کے مشتق پر منحصر ہوتی ہے۔

بعض اوقات یہ ماڈل حقیقت کے ساتھ شدید عدم مطابقت ظاہر کرتے ہیں، خاص طور پر ریٹل ٹائم ماڈلنگ، اکنامکس ماڈل، سیل گروتھ ماڈل اور اسٹاک مارکیٹنگ کے تجزیہ میں۔ اس طرح کے ریاضیاتی ماڈل کی حرکیات کو بہتر بنانے کے لیے محققین نے گورننگ ڈیفرنشیل مساوات میں تاخیر کی اصطلاحات کو شامل کیا جس کے نتیجے میں تاخیر کی ڈیفرنشیل مساوات پیدا ہوتی ہے۔ تاخیر ڈیفرنشیل مساوات (DDEs) ڈیفرنشیل مساوات کی ایک خاص کلاس تشکیل دیتے ہیں جس میں، حل کی شرح موجودہ کے ساتھ ساتھ منحصر متغیر کی کچھ سابقہ قدر اور/یا ان کے مشتق پر منحصر ہوتی ہے۔ DDEs بڑے پیمانے پر جسمانی سائنسز، بائیو سائنسز، انجینئرنگ، الیکٹرو ڈائنامکس اور اکنامکس میں عمل کو ماڈل بنانے کے لیے استعمال ہوتے ہیں۔

مونوگراف [92] میں ریحان DDEs کی قابلیت اور مقداری خصوصیات کا تجزیہ کرتے ہیں اور بائیو سائنسز میں اس کی اپیلی کیشنز کے ساتھ، [48] DDEs کا استعمال کرتے ہوئے انسانی اعصابی توازن کنٹرول ماڈل کا مطالعہ کرتے ہیں، [110] نے Nicholson's blowflies تاخیر ماڈل کے کنورجنس پر کچھ نتائج پیدا کیے۔ [109] نے فارم کی سطح پر کوکو کی پیداوار پر بارش کے اثرات کا مطالعہ کرنے کے لیے DDEs ماڈل کا استعمال کیا۔ Karatza & Karahis [54] آبادی کا فارما کوکانٹنگ ماڈل تیار کرنے کے لیے DDEs کا فعال طور پر استعمال کرتے ہیں جو irbesartan کے ارتکاز کے وقت کے پروفائلز میں دوہری چوٹیوں کو بیان کرنے کے لیے ایک مناسب نقطہ نظر ثابت ہوتا ہے۔ الیکٹرو ہائیڈرولک سروو میکزم (EHS) میں DDEs کا ایک اور اہم اطلاق ہے، یہ طریقہ کار بڑے پیمانے پر کنٹرول سسٹمز میں بطور ایکچویٹرز استعمال کیا جاتا ہے [44]۔ DDEs کا تفصیلی تجزیہ اور اطلاقات [13, 35, 101, 56] اور مندرجہ ذیل ابواب میں مل سکتے ہیں۔۔۔ تاخیر τ کی نوعیت پر منحصر ہے، DDEs کے مختلف فارمیٹس ہوتے ہیں جیسے

• DDEs مستقل تاخیر کے ساتھ

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)), t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t) = \phi_0(t), t \leq t_0. \end{cases} \quad (1.16)$$

• DDEs وقت پر منحصر تاخیر کے ساتھ $\tau(t)$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t))), t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t) = \phi_0(t), t \leq t_0. \end{cases} \quad (1.17)$$

• DDEs حالت پر منحصر تاخیر کے ساتھ $\tau(t, y)$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y))), t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t) = \phi_0(t), t \leq t_0. \end{cases} \quad (1.18)$$

• Neutral DDEs

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau_1(t, y)), y'(t - \tau_2(t, y))), t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t) = \phi_0(t), t \leq t_0. \end{cases} \quad (1.19)$$

• Proportional Delay

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(qt)), t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t) = \phi_0(t), t \leq t_0. \end{cases} \quad (1.20)$$

مندرجہ بالا مساوات میں، عام ڈیفرنشیل مساوات کے برعکس جہاں ہمیں ابتدائی قدر کے مسئلے کو حل کرنے کے لیے ابتدائی شرط کی ضرورت ہوتی ہے، ہمیں ایک ابتدائی فنکشن $\phi_0(t)$ کی ضرورت ہوتی ہے جسے منفرد حل حاصل کرنے کے لیے ہسٹری فنکشن کہا جاتا ہے۔ DDEs کا متحرک ڈھانچہ عام ڈیفرنشیل مساوات سے بہت زیادہ امیر ہے یعنی اسکیلر کیس میں دوغلی اور یہاں تک کہ افزاتفری کے رویے بھی ہو

سکتے ہیں۔ تاخیر کی اصطلاح کے شامل ہونے کی وجہ سے، ان مساواتوں کی کمپیوٹیشنل پیچیدگیاں بڑھ جاتی ہیں، اس طرح ان مساواتوں کو تجزیاتی طور پر حل کرنا بہت پیچیدہ ہو جاتا ہے۔ نیز، بعض صورتوں میں ان مساواتوں کا تجزیاتی حل موجود نہیں ہے، اس لیے تخمینی حل تلاش کرنے کے لیے ایک موثر عددی تکنیک ضروری ہے۔ DDEs کو حل کرنے کے لیے بنیادی عددی تکنیکوں کا آغاز عام ڈیفرنشیل مساوات کے لیے دستیاب تکنیکوں سے ہوتا ہے، جہاں تاخیر کی اصطلاح کو شامل کرنے جیسی اضافی کارروائیوں کی ضرورت ہوتی ہے۔

1.8 وجود اور انفرادیت

یہاں ہم DDEs کے حل کے وجود اور انفرادیت پر کچھ نتائج بیان کرتے ہیں۔ یہ نتائج [45, 78] اور [35] میں ثابت شدہ تھیوریز کی مخصوص مثالوں کے طور پر حاصل کیے گئے ہیں۔
تھیوریم 12 (Theorem) (Local existence) مساوات پر غور کریں۔

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t))), t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.21)$$

اور فرض کریں کہ فنکشن $f(t, u, v)$ $A \subseteq [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ پر مسلسل ہے اور مقامی طور پر لپسچٹز مسلسل u اور v کے حوالے سے۔ مزید یہ کہ فرض کریں کہ تاخیر کا فنکشن $\tau(t) \geq 0$ مسلسل ہے $[t_0, t_f]$ میں اور وقفہ $[t_0, t_0 + \xi]$ میں کچھ $t - \tau(t) > t_0$ کے لیے۔ پھر مسئلہ (1.21) کا $[t_0, t_0 + \delta]$ میں کچھ $\delta > 0$ کے لئے منفرد حل ہے اور یہ حل مسلسل ابتدائی اعداد و شمار پر منحصر ہے۔

تھیوریم 13 (Theorem) (Global existence) مساوات پر غور کریں۔

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t))), t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.22)$$

اور فرض کریں کہ فنکشن $f(t, u, v) : A \subseteq [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ پر مسلسل ہے اور u اور v کے حوالے سے مقامی طور پر Lipschitz مسلسل ہے۔ مزید یہ کہ فرض کریں کہ تاخیر کا فنکشن $\tau(t) \geq 0$ ، $\tau(t_0) = 0$ اور $t_0 < b \leq t_f$ کے ساتھ پابند ہے، تو یہ پورے وقفہ $[t_0, t_f]$ میں 0 پر مسلسل ہے اور کچھ $t_0 < \tau(t) < t_f$ کے لیے وقفہ $[t_0, t_0 + \xi]$ میں۔ اگر وقفہ $[t_0, b]$ میں بیان کردہ (1.22) کا منفرد زیادہ سے زیادہ حل، $t_0 < b \leq t_f$ کے ساتھ پابند ہے، تو یہ پورے وقفہ $[t_0, t_f]$ پر موجود ہے۔

[35] میں، ڈرائیور نے تھیوریم ?? کو ثابت کیا ہے، جو کہ حالت پر منحصر تاخیر کی زیادہ عام صورت میں تھیوریم 12 کی توسیع ہے۔ مزید پیشرفت اور عام معاملات کے لیے ہم دلچسپی رکھنے والے قارئین کو [27، 45] اور اس میں حوالہ جات کا حوالہ دیتے ہیں۔

1.9 DDEs کو حل کرنے کے طریقے

یہاں ہم نے تاخیر کی ڈیفرنشیل مساوات کو حل کرنے کے لیے کچھ تجزیاتی طریقے پر روشنی ڈالی ہے۔

1.9.1 DDEs کو حل کرنے کے اقدامات کا طریقہ

تأخیر کی ڈیفرنشیل مساوات کو مراحل کے طریقہ کار سے لگاتار وقفوں $[t_l, t_{l+1}]$ پر عام ڈیفرنشیل مساوات کے طور پر حل کیا جاسکتا ہے۔ اسکیلر DDE

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)), t > 0, \quad (1.23)$$

ابتدائی فنکشن $\phi_0(t)$ کے ساتھ $t \in [-\tau, 0]$ پر بیان کیا گیا ہے اور ابتدائی حالت $y(0) = y_0$ کو ڈیفرنشیل مساوات کی زنجیر کے طور پر حل کیا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned} y'_1(t) &= f(t, y_1(t), \phi_0(t - \tau)), \quad 0 \leq t \leq \tau, \\ y'_2(t) &= f(t, y_2(t), y_1(t - \tau)), \quad \tau \leq t \leq 2\tau, \\ &\vdots \\ y'_n(t) &= f(t, y_n(t), y_{n-1}(t - \tau)), \quad (n-1)\tau \leq t \leq n\tau, \end{aligned} \quad (1.24)$$

جہاں $n \in \mathbb{Z}^+$.

مثال 14 مسلسل تاخیر کے ساتھ ایک سادہ ڈی ڈی ای پر غور کریں۔

$$y'(t) = y(t-1) \quad (1.25)$$

ابتدائی فنکشن $y(t) = 1, \forall t \in [-1, 0]$ اور ابتدائی حالت $y(0) = 1$ کے ساتھ۔

اقدامات کے طریقہ کار کے بنیادی خیال کو استعمال کرتے ہوئے، پہلے ہم وقفہ $[0, 1]$ پر دیے گئے DDEs کو غیر خود مختار ODE میں تبدیل کرتے ہیں

$$y_1'(t) = \phi_0(t-1)$$

جہاں $\phi_0(t) = 1, t \in [-1, 0]$ اب حل کی اینٹیگرل شکل کا استعمال کرتے ہوئے، ہمارے پاس $\forall t \in [0, 1]$ ہے۔

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y(0) + \int_0^t \phi_0(s-1) ds \\ &= y(0) + \int_0^t 1 ds \\ &= y(0) + t \\ &= 1 + t \end{aligned}$$

اب $y(t)$ کی طرف سے اشارہ کیا جاتا ہے) $[0, 1]$ میں جانا جاتا ہے، اس سے پہلے کہ ہم وقفہ $[1, 2]$ پر DDE (1.25) کو

$$y_2'(t) = y_1(t-1)$$

کے طور پر غیر خود مختار ODE تک کم کر سکتے ہیں۔ جہاں $t \in [0, 1]$ ، $y_1(t) = 1 + t$ ہے۔ $t \in [1, 2]$ پر حل کی اینٹیگرل شکل کا استعمال کرتے ہوئے، ہمارے پاس

$$\begin{aligned} y_2'(t) &= y_1(1) + \int_1^t y_1(s-1) ds \\ &= y_1(1) + \int_0^t (1+t) ds \\ &= y_1(1) + t + \frac{t^2}{2} \\ &= 2 + t + \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

ہے۔ لہذا، $t \in [1, 2]$

$$y_2(t) = 2 + t + \frac{t^2}{2}.$$

کے لیے جب تک مطلوبہ حل حاصل نہیں ہو جاتا اس طریقہ کار کو جاری رکھ سکتا ہے۔ مطلوبہ حل حاصل کرنے تک کوئی بھی طریقہ کار جاری رکھ سکتا ہے۔ لیکن زیادہ تر وقت کے نتیجے میں اینٹیگرل تیزی سے بہت بوجھل ہو جاتے ہیں اور اس درست طریقہ کار سے حل کے بارے میں کوئی نتیجہ اخذ کرنا بہت مشکل ہوتا ہے۔

1.9.2 لاپلاس ٹرانسفارمیشن کا طریقہ

مساوات پر غور کریں۔

$$y'(t) = cy(t-1) + f(t) \quad t > 1, \quad (1.26)$$

ابتدائی فنکشن $y(t) = g(t)$ $0 \leq t \leq 1$ کے ساتھ۔ دونوں طرف لاپلاس ٹرانسفارم لینے پر ملتا ہے

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} y'(t) e^{-st} dt &= \int_1^{\infty} y'(t-1) e^{-st} dt + \int_1^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ y(t) e^{-st} dt - \int_1^{\infty} y'(t) (-s) e^{-st} dt &= c \int_0^{\infty} y'(u) e^{-s(u+1)} du. \end{aligned}$$

فرض کریں، $y(t)e^{-st} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ یہ دیتا ہے

$$-e^{-s}y(1) + s \int_1^{\infty} y(t)e^{-st} dt = ce^{-s} \int_0^1 y(u)e^{-su} du + ce^{-s} \int_1^{\infty} y(u)e^{-su} du.$$

یہ بھی مان لیں، $s - ce^{-s} \neq 0$ پھر ہمارے پاس ہے

$$\int_1^{\infty} y(t)e^{-st} dt = \frac{ce^{-s} \int_0^1 y(u)e^{-su} du + e^{-s}y(1) + \int_1^{\infty} f(t)e^{-st} dt}{s - ce^{-s}}. \quad (1.27)$$

فرض کریں کہ لاپلیس ٹرانسفارم کے الٹ کو لاگو کیا جا سکتا ہے۔

$$y(t) = \int_{(b)} \left(\frac{ce^{-s} \int_0^1 y(u)e^{-su} du + e^{-s}y(1) + \int_1^{\infty} f(t)e^{-st} dt}{s - ce^{-s}} \right) e^{st} ds, \quad (1.28)$$

جہاں انٹیگرل کو عمودی لائن $Re(s) = b$ پر کیا جاتا ہے، جس میں b کافی بڑا ہوتا ہے۔ اس سے معلوم ہوا کہ $s - ce^{-s}$ کے تمام زیرو بائیں آدھے پلین میں پڑے ہیں، اور یہ کہ (1.28) میں تعلق درست ہے اگر یہ تمام صفر $Re(s) < b$ مطمئن ہوں۔ [27] میں، دیگر طریقوں جیسے حل کے معین انضمام، سیریز کی توسیع، خصوصیات کی تقسیم کے ساتھ حل کے غیر علامتی رویے اور مسئلہ کے استحکام پر تبادلہ خیال کیا گیا ہے۔

اس مقالے کا مقصد تاخیر کی ڈیفرنشیل مساوات کے ایک خاص طبقے کا ایک قابل اعتماد عددی تخمینہ پیش کرنا ہے جسے پینٹوگراف مساوات کہا جاتا ہے۔ مناسب تاخیر کی ڈیفرنشیل مساوات کی آسان ترین شکل

$$y'(t) = ry(t) + sy(qt), \quad 0 < q < 1, \quad t \geq 0, \quad (1.29)$$

ہے۔ جہاں $r, s, \in \mathbb{C}$ ہے۔ کچھ ادب میں ان مساوات کا تذکرہ متناسب تاخیر (proportional-delay) کی ڈیفرنشیل مساوات کے طور پر کیا گیا ہے۔ یہ مساوات بہت سے طبعی اور ریاضیاتی مظاہر کی وضاحت کرتی ہیں جیسے برقی لوکو موٹیو کے لیے اوور ہیڈ کرنٹ کلیکشن سسٹم کی حرکیات، کہکشاں میں روشنی جذب، نظریہ قطار، نمبر تھیوری میں تقسیم کے مسائل، سیل کی ترقی کا ماڈل، اور امکانی نظریہ۔ IVPs، BVPs،

کے عددی حل، نظام ڈیفرنشیل مساوات، اور فریکشنل آرڈر ڈیفرنشیل مساوات کے ساتھ ان کے اطلاقات پر مندرجہ ذیل ابواب میں بحث کی گئی ہے۔

1.10 مقالہ کا مقصد

یہ تحقیق تناسب تاخیر (proportional delay) کی ڈیفرنشیل مساوات کو حل کرنے کے لیے نئی عددی تکنیک تیار کرتی ہے۔ ہارویولٹ سیریز کا طریقہ اور ترمیم شدہ ہارویولٹ سیریز کا طریقہ خطی اور غیر خطی ابتدائی قدر کے مسائل (IVPs)، باؤنڈری ویلیو کا مسئلہ (BVPs)، فریکشنل آرڈر (IVPs)، اور نظام ڈیفرنشیل مساوات کو حل کرنے کے لیے بنایا گیا ہے۔ یہ اسکیمیں اعلیٰ درستگی اور کم کمپیوٹیشنل لاگت کے ساتھ نتائج پیدا کرنے کی صلاحیت رکھتی ہیں۔ تمام کمپیوٹر سمولیشنز MATLAB 2017 میں Intel i5 پروسیسر کے ساتھ 64 GB RAM 16 بٹ مشین پر کئے ہیں۔ ان طریقوں میں دیگر عددی اسکیم کے مقابلے میں کم بوجھل دستی حسابات شامل ہیں۔

1.11 مقالہ کا خاکہ

تھیس میں proportional delay ڈیفرنشیل مساوات کی مختلف اقسام کو حل کرنے کے لیے ہارویولٹ تکنیک پر تبادلہ خیال کیا گیا ہے۔ باب 2 میں، ہم نے ہارویولٹ طریقہ کا استعمال کرتے ہوئے تناسب تاخیر (proportional delay) ریکارڈی ڈیفرنشیل مساوات کو حل کیا ہے۔ باب 3، ڈیرپچلیٹ باؤنڈری ویلیو کے مسائل کے تناسب تاخیر کی شکل کو حل کرنے کے لیے ہارویولٹ پر مبنی عددی تکنیک سے متعلق ہے۔ ہم نے باب 4 میں سائٹیملٹینوس تناسب تاخیر ڈیفرنشیل مساوات کو حل کرنے کے لیے ہارویولٹ سیریز کا طریقہ استعمال کیا ہے۔ باب 5 میں، ترمیم شدہ ہارویولٹ سیریز کا طریقہ پیش کیا گیا ہے تاکہ الیکٹرو ڈائنامکس میں پیدا ہونے والی اعلیٰ ترتیب والی ملٹی سینٹوگراف مساوات کو حل کیا جاسکے۔ باب 6 میں، ہم نے فریکشنل کیلکولس کے کچھ تصورات پر تبادلہ خیال کیا اور فریکشنل آرڈر کی تناسب تاخیر ریکارڈی ڈیفرنشیل مساوات کو ایک قابل اعتماد کو لوکیشن کو لکیشن تکنیک سے حل کیا ہے۔

باب 2

ہارویولیت طریقہ کے ذریعہ متناسب تاخیر ریکاتی ڈیفرنشیل مساوات کا تقریبی حل

2.1 تعارف

ریکاتی (Riccati) ڈیفرنشیل مساوات (RDEs) غیر خطی ڈیفرنشیل مساوات کی کلاس کے تحت تے ہیں۔ عصری تجزیہ کے متعدد مسائل اور اس کے اطلاق کے لیے ان مساواتوں کا وسیع پیمانے پر مطالعہ کیا جاتا ہے، اور واضح طور پر حل کرنا آسان نہیں ہے، یہ ان مساواتوں کے حل کی چھان بین کو دلچسپ بنا دیتا ہے۔ یہاں، ہم نے درج ذیل Riccati ڈیفرنشیل مساوات پر غور کیا ہے:

$$y'(t) = q_1(t) + y(t)(q_2(t) + q_3(t)y(t)), t_0 \leq t \leq t_f, y(t_0) = y_0, \quad (2.1)$$

جہاں $q_1(t), q_2(t), q_3(x) (\neq 0)$ مسلسل ہیں، t_0, t_f اور $y(t_0)$ صوابدیدی مستقل ہیں اور $y(t)$ نامعلوم فنکشن ہے۔

اس کے متناسب-تاخیر (proportional-delay) کی قسم کو درجہ ذیل طریقہ سے لکھا جاسکتا ہے۔

$$y'(t) = \psi(t) + by(t) + cy(\alpha t)(d - y(\alpha t)), t_0 \leq t \leq t_f, y(t_0) = y_0, \quad (2.2)$$

جہاں $\psi(t), \alpha > 0, c \neq 0, b, d, y_0 \in C$ اور $0 < \alpha < 1$ جب $\alpha \neq 1$ ہے۔ مسلسل $\psi(t)$ اور $\alpha > 0$ جب $0 < \alpha < 1$ ایک ریٹارڈ مساوات پیدا کرتا ہے، جبکہ $\alpha > 1$ ایڈوانسڈ مساوات پیدا کرتا ہے۔ Picard-Lindelöf تھیوریم

کے مطابق ہے کہ (2.1) اور (2.2) کے حل موجود ہیں اور یہ منفرد ہے۔ Riccati ڈیفرنشیل مساوات سے متعلق مزید مطالعات کے لیے [14, 75, 90, 91] دیکھیں۔

RDEs بے ترتیب عمل، گلن فلٹنگ سسٹم اور نیٹ ورک کی ترکیب میں بڑے پیمانے پر ظاہر ہوتے ہیں۔ اس کے سپر سیمیٹرک کوانٹم میکینکس، کوانٹم کیمسٹری کے میدان میں بہت زیادہ اہمیت رکھتے ہیں اور نظریہ بہترین کنٹرول، سٹاکسٹک کنٹرول تھیوری، مالیاتی ریاضی، بازی کے مسائل، اکانومیٹرک ماڈلز اور ڈائنامک گیمز میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

تاخیر سے ماڈلنگ بہت سے physical applied عمل میں ضروری ہے اور مقصد کو پورا کرنے کے لیے تاخیر کی ڈیفرنشیل مساوات کو نمایاں طور پر استعمال کیا گیا ہے۔ تاخیر کی ڈیفرنشیل مساوات فیصلہ سازی، کیمیکلز کی ریاضیاتی ماڈلنگ، حیاتیاتی، جسمانی عمل، اقتصادی ترقی، نیورل نیٹ ورکس اور تاخیری متحرک حصے میں لامحالہ پیدا ہوتی ہیں، RDEs کے مزید اطلاق کے لیے کوئی [23, 34, 59, 76] حوالہ جات میں دیکھ سکتا ہے۔

حالیہ برسوں میں، ان ڈیفرنشیل مساوات کا تقریبی حل تلاش کرنے کا مسئلہ توجہ حاصل کرتا ہے اور بہت سے ریاضی دانوں نے اس کا جائزہ لیا ہے۔ Riccati ڈیفرنشیل مساوات کے عددی حل کے لیے پہلے سے استعمال کیے گئے طریقے variational iteration method (VIM) [38], the modified variational iteration method (MVIM) [1], homotopy perturbation method (HPM) [16], differential transform method (DTM) [75], Bezier curves method [40]. Reproducing kernel Hilbert space method (RKHS) [49] اور Bezier control point method [39] کا استعمال تاخیر RDEs کا تقریبی حل تلاش کرنے کے لیے کیا جاتا ہے۔ [23] میں کچھ غیر لکیری متناسب تاخیر کی ڈیفرنشیل مساوات کے نیم تجزیاتی حل پر تبادلہ خیال کیا گیا ہے۔ [5] میں، مصنف نے مسئلہ کے حل کا تقریب لگانے کے لیے ایک قدمی اسکیم تیار کرنے کے لیے اسٹاکسٹک تاخیر کی ڈیفرنشیل مساوات کے عددی علاج کا مطالعہ کیا۔ [80] نے تاخیر Duffing مساوات کے لیے عین متواتر حل کے عددی شمولیت

کا مطالعہ کیا اور تصدیق شدہ عددی حسابات کی بنیاد پر جبری تاخیر Duffing مساوات کے متواتر حل کے مجوزہ وجود کا مطالعہ کیا۔

اس باب کا مقصد ایک عددی طریقہ پیش کرنا ہے جس کی کمپیوٹیشنل لاگت کم ہے اور یہ ہمیں RDEs اور متناسب تاخیر RDEs کو حل کرنے کی اجازت دے گا۔ یہ طریقہ ہار ویولیت کی بنیاد پر ہے اور اسے ہار ویولیت میتھڈ کا نام دیا گیا ہے۔ خیال یہ ہے کہ ڈیفرنشیل مساوات کو الجبری مساوات کے نظام میں تبدیل کیا جائے جس سے تقریبی حل حاصل کیا جاسکے۔ اس طریقہ کو لکیری کے ساتھ ساتھ غیر خطی مسائل پر بھی آزمایا جاتا ہے اور بہت امید افزا نتائج برآمد ہوتے ہیں۔

2.2 Haar ویولیت بیسز اور اس کا انٹیگریشن

Haar ویولیت سسٹم $\{\eta_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ پر کی تعمیر کے لیے دو بنیادی افعال درکار ہیں، یعنی

(I) Haar اسکیلنگ فنکشن (باپ ویولیت):

$$\eta_1(t) = \mathbb{1}_{[\Gamma_1, \Gamma_2)}(t). \quad (2.3)$$

(ب) ماں ویولیت

$$\eta_2(t) = \mathbb{1}_{[\Gamma_1, (\Gamma_1 + \Gamma_2)/2)}(t) - \mathbb{1}_{[(\Gamma_1 + \Gamma_2)/2, \Gamma_2)}(t), \quad (2.4)$$

جہاں $\mathbb{1}_{[a, b)}(t)$ انڈیکیٹر فنکشن ہے۔ اب ہار ویولیت سیریز بنانے کے لیے، z کو ڈائلیشن اور k کو ٹرانسلیشن پیرامیٹر ہونے دیں۔

پھر Haar-i-th ویولٹ کی تعریف اس طرح کی گئی ہے:

$$h_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \in [\vartheta_1(i), \vartheta_2(i)) \\ -1 & \text{for } t \in [\vartheta_2(i), \vartheta_3(i)) \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2.5)$$

جہاں $\vartheta_1(i) = \Gamma_1 + (\Gamma_2 - \Gamma_1)k/2^j$, $\vartheta_2(i) = \Gamma_1 + (\Gamma_2 - \Gamma_1)(k + 0.5)/2^j$, $\vartheta_3(i) = \Gamma_1 + (\Gamma_2 - \Gamma_1)(k + 1)/2^j$ انڈیکس $i = 2^j + k + 1$, $j = 0, 1, \dots, J$ جہاں j ویولٹ کی عظیم سطح ہے اور $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ ہے۔

(پ). اسکیلنگ فنکشن اسپیس اور ویولٹ اسپیس کی وضاحت حسب ذیل کریں۔

$$V_j = \text{span}\{2^{j/2}h_1(2^j t - k), t \in [\Gamma_1, \Gamma_2]\}_{k=0}^{2^j-1}, \quad (2.6)$$

$$W_j = \text{span}\{2^{j/2}h_2(2^j t - k), t \in [\Gamma_1, \Gamma_2]\}_{k=0}^{2^j-1}.$$

فرض کریں کہ $0 \leq J_0 < J$ ، تو درج ذیل رشتہ رکھتا ہے:

$$V_J = V_{J_0} \otimes W_{J_0} \otimes W_{J_0+1} \cdots \otimes W_{J-1}. \quad (2.7)$$

اسپیس V_j اس طرح کی ہیں۔ $L^2([\Gamma_1, \Gamma_2]) = \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j}$ اور $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \cdots \subset L^2([\Gamma_1, \Gamma_2])$ ۔ ہمیں مندرجہ ذیل کٹی ہوئی ہارسیریز کے ساتھ اس لیے $L^2([\Gamma_1, \Gamma_2]) = V_0 \otimes (\bigotimes_{j_0}^{\infty} W_{j_0})$ رکھتا ہے یہ ہمیں مندرجہ ذیل کٹی ہوئی ہارسیریز کے ساتھ کسی بھی $f \in L^2([\Gamma_1, \Gamma_2])$ کا تقریب لگانے کی اجازت دیتا ہے:

$$f_{\text{approx}}(t) \approx \sum_{i=1}^{2^{J+1}} a_i h_i(t). \quad (2.8)$$

انٹروال $[0, 1]$ میں $\vartheta_1(i), \vartheta_2(i), \vartheta_3(i)$ درج ذیل فارم لے لیتے ہیں۔

$$\vartheta_1(i) = \frac{k}{2^j}, \vartheta_2(i) = \frac{(k+0.5)}{2^j}, \vartheta_3(i) = \frac{(k+1)}{2^j}.$$

Haar ویولیت کو لاگو کرنے کے لیے درج ذیل انٹیگرلز کی ضرورت ہے:

$$I_1 h_i(t) = \int_0^t h_i(t) dt, I_2 h_i(t) = \int_0^t I_1 h_i(t) dt, \dots I_n h_i(t) = \int_0^t I_{(n-1)} h_i(t) dt.$$

ان انٹیگرل کو (2.5) کے تجزیاتی انٹیگریشن سے شمار کیا جا سکتا ہے،

$$I_1 h_i(t) = \begin{cases} t - \vartheta_1(i) & \text{for } t \in [\vartheta_1(i), \vartheta_2(i)) \\ \vartheta_3(i) - t & \text{for } t \in [\vartheta_2(i), \vartheta_3(i)) \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2.9)$$

اور

$$I_2 h_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t - \vartheta_1(i))^2 & \text{for } t \in [\vartheta_1(i), \vartheta_2(i)), \\ \frac{1}{2^{2j+2}} - \frac{1}{2}(\vartheta_3(i) - t)^2, & \text{for } t \in [\vartheta_2(i), \vartheta_3(i)), \\ \frac{1}{2^{2j+2}}, & \text{for } t \in [\vartheta_3(i), 1), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.10)$$

عام طور پر، انٹروال $[0, 1]$ پر (2.5) کے n th انٹیگرل کی قدر ہے

$$I_n h_i(t) = \frac{1}{n!} \begin{cases} 0 & \text{for } t \in [0, \vartheta_1(i)) \\ (t - \vartheta_1(i))^n & \text{for } t \in [\vartheta_1(i), \vartheta_2(i)) \\ (t - \vartheta_1(i))^n - 2(t - \vartheta_2(i))^n & \text{for } t \in [\vartheta_2(i), \vartheta_3(i)) \\ (t - \vartheta_1(i))^n - 2(t - \vartheta_2(i))^n + (t - \vartheta_3(i))^n & \text{for } t \in [\vartheta_3(i), 1). \end{cases} \quad (2.11)$$

$i = 1$ کی صورت میں، ہمارے پاس اسکیلنگ فنکشن کا n th انٹیگرل $I_n h_i$ ہے جس کا اندازہ (2.3) سے کیا گیا ہے۔

$$I_n h_i(t) = \frac{t^n}{n!}. \quad (2.12)$$

2.3 طریقہ کار کی تفصیل

(2.1) اور (2.2) کو حل کرنے کے لیے، Haar ویولٹ کی توسیع کے ذریعے، فرض کریں

$$y'(t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(t). \quad (2.13)$$

t کے حوالے سے (2.13) کو 0 سے t تک انٹیگرل کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$y(t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i I_1 h_i(t) + y(0), \quad (2.14)$$

نیز

$$y'(\alpha t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(\alpha t), \quad (2.15)$$

اور

$$y(\alpha t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i I_1 h_i(\alpha t) + y(0). \quad (2.16)$$

(2.13)، (2.14) کو (2.1) میں، اور (2.15)، (2.16) کو (2.2) میں $t_l = \frac{(l-0.5)}{2M}$ ، $l = \text{collocation points}$

1, 2, ..., 2M کے ساتھ استعمال کر کے ہمارے پاس مساوات کا درج ذیل نظام ہے

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(t_l) &= q_1(t_l) + \left[\sum_{i=1}^{2M} a_i I_1 h_i(t_l) + y(0) \right] q_2(t_l) \\ &+ q_3(t_l) \left[\sum_{i=1}^{2M} a_i I_1 h_i(t_l) + y(0) \right] \left[\sum_{i=1}^{2M} a_i I_1 h_i(t_l) + y(0) \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

اور

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(t_l) &= \psi(t_l) + b \left[\sum_{i=1}^{2M} a_i I_1 h_i(t_l) + y(0) \right] \\ &+ c \left[\sum_{i=1}^{2M} a_i I_1 h_i(\alpha t_l) + y(0) \right] \left[d - \left(\sum_{i=1}^{2M} a_i I_1 h_i(\alpha t_l) + y(0) \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

مساوات کے اوپر والے غیر خطی نظام کو کلاسیکی نیوٹن کے طریقہ کار سے حل کیا جاسکتا ہے، ہارکو فیشنٹس a_i s (2.17) اور (2.13) سے حاصل کر کے (2.14) میں استعمال کرنے پر ہمیں (2.1) اور (2.2) کا تقریبی

حل ملتا ہے۔

2.3.1 Haar ویولٹ کا کنورجنس تجزیہ

معاونہ (Lemma) 1.2.3 فرض کریں کہ $w(t) \in [0, 1]$ پر باؤنڈڈ فرسٹ ڈیریویٹیو کے ساتھ کوئی بھی مربع اینٹیگرل فنکشن ہو، پھر J th کی سطح پر خرابی کا معیار مندرجہ ذیل عدم مساوات کو پورا کرتا ہے۔

$$\|e_j(t)\| \leq \sqrt{\frac{K}{7}} C 2^{-(3)2^{j-1}} \quad (2.19)$$

جہاں K, C کچھ حقیقی مستقل ہیں۔

ثبوت 1 ثبوت کے لیے دیکھیں [9]

2.4 عددی تجربہ

یہاں ہم عددی مسائل اور مختلف قسم کے Riccati اور متناسب تاخیر Riccati ڈیفرنشیل مساوات کو حل کرنے کے لیے ہارویولٹ کے طریقہ کار پر بحث پیش کریں گے۔ ہم نے دکھایا ہے کہ ہماری تکنیک کی کارکردگی تیز ہے اور کچھ مسائل میں مطلق غلطی نمایاں طور پر کم ہو رہی ہے۔ اس کے علاوہ، ہم نے $R_c(J)$ کی تجرباتی شرح کی گنتی کی ہے جس کی خصوصیت [68] میں بیان کی گئی ہے۔ ہم اس حصے کو دو درجہ Riccati (quadratic) ڈیفرنشیل مساوات کے ساتھ شروع کرتے ہیں اور اس کے بعد ہم کچھ تاخیر Riccati ڈیفرنشیل مساوات پر غور کریں گے۔

$$R_c(J) = \frac{\log[E_c(J-1)/E_c(J)]}{\log(2)}, \quad (2.20)$$

جہاں $E_c(J)$ error ہے، سطح J پر۔

مسئلہ 1- درج ذیل دو درجہ Riccati (quadratic) ڈیفرنشیل مساوات پر غور کریں۔ مساوات [40]

ٹیبل 2.1: J کی مختلف سطحوں پر عظیم مطلق غلطیاں (مسئلہ 1)۔

عظیم مطلق غلطی	J کی قدر
$1.4654E - 14$	2
$1.1546E - 14$	3
$3.1086E - 15$	4
$2.6645E - 15$	5
$3.5527E - 15$	6
$8.8818E - 16$	7

سے لی گئی ہے

$$y'(t) = 16t^2 - 5 + 8ty(t) + y^2(t), 0 \leq t \leq 1, y(0) = 1. \quad (2.21)$$

(2.21) کا درست حل $y(t) = 1 - 4t$ ہے۔ یہاں ہم نے اس مسئلے کو ہارویولیت کی توسیع ارو اسکے اینٹیگرلس استعمال کر کے حل کیا ہے۔

ویولیت سطح $J = 2$ پر Haar کو فیشینٹس کی قدر ہیں $a_1 = -4.000000, a_2 = 0.000000, a_3 = 0.000000, a_4 = 0.000000, a_5 = 0.000000, a_6 = 0.000000, a_7 = 0.000000, a_8 = 0.000000$

0.000000 - کو فیشینٹس a_1 نمایاں طور پر قریب ہے -4 کے۔ اور بقیہ کو فیشینٹس چھ اعشاریہ تک صفر

درست ہیں۔ لہذا (2.14) سے حل ہے $-a_1 I_1 h_1(t) + y(0)$ یعنی $-4t + 1$ جو ایک جیسا ہے عین مطابق

حل کے۔ قراردادوں کی مختلف سطحوں پر غلطی کا تخمینہ جدول 2.1 میں دیا گیا ہے۔ ہم نے مشاہدہ کیا کہ

ریزولوشن کی سطح میں اضافے کے ساتھ اچھا تقریب حاصل کیا جا سکتا ہے۔ ہارویولیت میتھڈ اور ریزیزٹر

کروز میتھڈ [40] کے درمیان موازنہ ٹیبل 2.2 میں رپورٹ کیا گیا ہے جو واضح طور پر ظاہر کرتا ہے کہ ہمارے

معاملے میں ریزیزٹر کروز طریقہ کے مقابلے میں مطلق غلطی نمایاں طور پر کم ہو گئی ہے۔ $J = 3$ پر عین حل

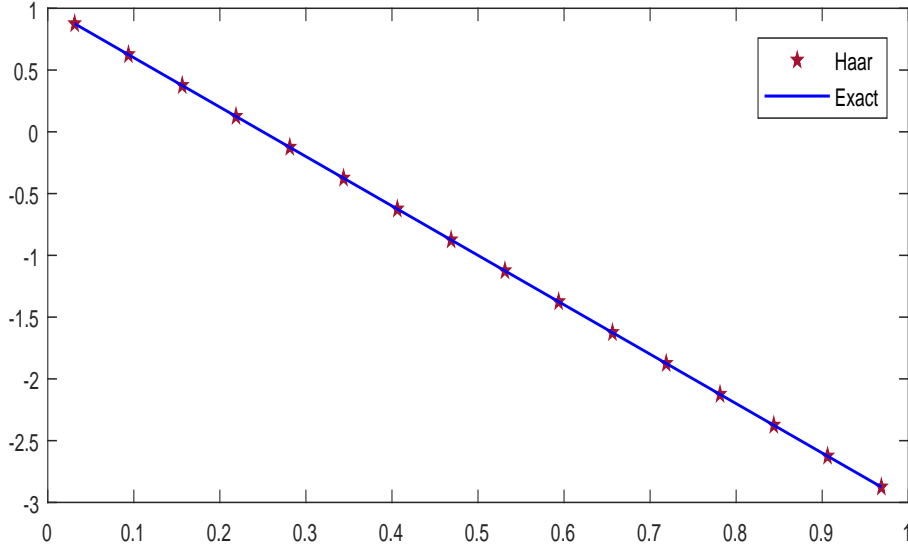
اور عددی حل کے درمیان موازنہ کو شکل 2.1 میں دکھایا گیا ہے اور ہم نے مشاہدہ کیا کہ دونوں منحنی خطوط

ایک ساتھ ہیں۔

مسئلہ 2 - درج ذیل مساوات کو حل کریں۔

ٹیبل 2.2: $J = 3$ کے ساتھ مسئلہ 1 کے لیے عظیم مطلق غلطی۔

منحنی طریقہ [40]	ہمارا طریقہ
Bezier	
$5.3714E - 04$	$5.3735E - 14$



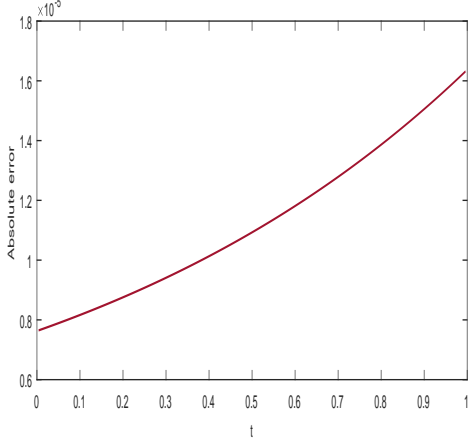
تصویر 2.1: $J = 3$ پر عین اور عددی حل کا موازنہ۔

$$y'(t) = e^t - e^{3t} + 2e^{2t}y(t) - e^t y^2(t), 0 \leq t \leq 1, y(0) = 1 \quad (2.22)$$

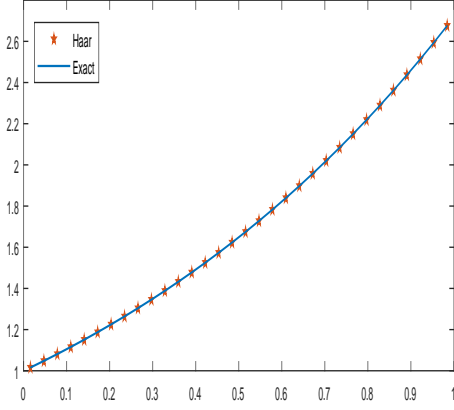
(2.22) کا درست حل $y(t) = e^t$ [40] ہے۔ ریزولوشن مختلف سطحوں پر عظیم مطلق غلطی ٹیبل 2.3 میں دکھائی گئی ہے۔ ٹیبل 2.3 سے ہم نے دیکھا ہے کہ ریزولوشن میں اضافے کے ساتھ خرابی کم ہو رہی ہے۔ نتیجہ کا موازنہ ٹیبل 2.5 میں Bezier Curves طریقہ [40] سے کیا گیا ہے۔ $J = 4$ کے عین حل اور عددی حل کے درمیان موازنہ کو تصویر 2.2 میں دکھایا گیا ہے۔۔۔ کمپیوٹر سمولیشن اس بات کی نشاندہی کرتے ہیں کہ ریزولوشن کو بڑھا کر ایک اچھا تقریبی حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 3۔ درج ذیل ریکالٹی ڈیفرنشیل مساوات پر غور کریں۔

$$y'(t) = y(t) - 50ty^2 + f(t), 0 \leq t \leq 1, y(0) = 1. \quad (2.23)$$



تصویر 2.3: مطلق غلطی (مسئلہ 2)
پر $J = 6$



تصویر 2.2: درست اور عددی حل
کے درمیان موازنہ (مسئلہ 2)۔

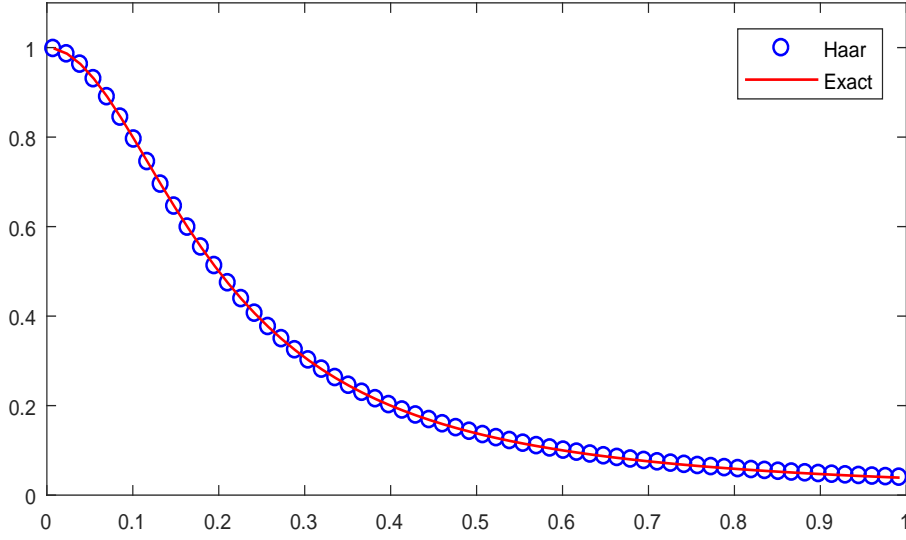
ٹیبل 2.4: J کی مختلف سطحوں پر
عظیم مطلق غلطیاں (مسئلہ 4)۔

ٹیبل 2.3: J کی مختلف سطحوں پر
عظیم مطلق غلطیاں (مسئلہ 2)۔

عظیم مطلق غلطی	J کی قدر	عظیم مطلق غلطی	J کی قدر
$3.1062E - 03$	5	$2.5841E - 04$	4
$7.8308E - 04$	6	$6.5049E - 05$	5
$1.9648E - 04$	7	$1.6315E - 05$	6
$4.9204E - 05$	8	$4.0855E - 06$	7
$1.2307E - 05$	9	$1.0238E - 06$	8
$3.0790E - 06$	10	$2.5889E - 07$	9

ٹیبل 2.5: $J = 5$ کے ساتھ مسئلہ 2 کے لیے عظیم مطلق غلطی۔

منحنی طریقہ [40] Bezier	ہمارا طریقہ
$8.0175E - 04$	$6.5049E - 05$



تصویر 2.4: عین اور عددی حل کے درمیان موازنہ (مسئلہ 3)۔

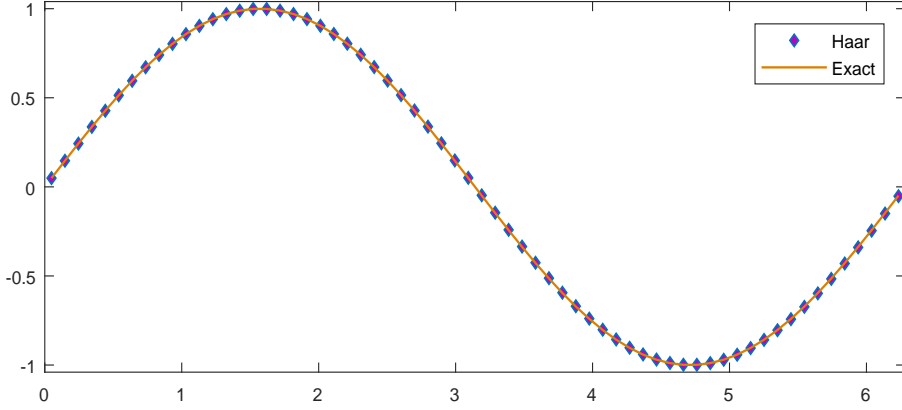
فنکشن $f(t)$ کا انتخاب اس طرح کیا گیا ہے کہ (2.23) کا درست حل $y(t) = \frac{1}{1+25t^2}$ ہو۔ ہم نے $J = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ پر عظیم مطلق غلطی اور کنورجنس کی تجرباتی شرح کا حساب لگایا ہے۔ عظیم مطلق خرابی $J = 4$ کے لیے آرڈر 10^{-3} سے $J = 9$ کے لیے 10^{-6} تک کم ہو رہی ہے۔

مزید، ہم نے مشاہدہ کیا کہ ریزولوشن کی سطحوں کو بڑھا کر عظیم مطلق غلطی کم ہوتی ہے اور کنورجنس کی عددی شرح 2 تک پہنچ جاتی ہے، اس طرح نظریاتی نتائج کی تصدیق ہوتی ہے (مصنفین نے [68] میں مطالعہ کیا)۔ آخر میں، تقریبی اور درست حل کے درمیان موازنہ تصویر 2.4 میں دکھایا گیا ہے۔

مسئلہ 4۔ درج ذیل متناسب تاخیر کی ڈیفرنشیل مساوات کو حل کریں۔

$$y'(t) = 1 - 2y^2\left(\frac{t}{2}\right), 0 \leq t \leq 2\pi, y(0) = 0. \quad (2.24)$$

(2.24) کا درست حل $y(t) = \sin(t)$ [23] ہے۔ اس مسئلہ میں $\alpha = 1/2$ جو کہ ریٹارڈ مساوات کا معاملہ ہے۔ ہم نے اس مسئلے کو ہارویولیت کی توسیع اور ہارویولیت کے انٹیگرل کا استعمال کرتے ہوئے حل کیا ہے۔ مختلف ریزولوشن کے لیے عظیم مطلق غلطی ٹیبل 2.4 میں دکھائی گئی ہے۔ $J = 5$ پر تجزیاتی



تصویر 2.5: درست اور عددی حل کے درمیان موازنہ (مسئلہ 4)۔

اور تقریبی حل کے درمیان موازنہ تصویر 2.5 میں دکھایا گیا ہے۔ عظیم مطلق غلطی $J = 10$ پر $3.0790E-06$ ہے ہم نے مشاہدہ کیا کہ J کی قدر میں اضافہ کر کے ایک اچھا تقریب حاصل کیا جاسکتا ہے۔
مسئلہ 5۔ درج ذیل تاخیر کی مساوات کو حل کریں۔

$$y'(t) = \frac{1}{4}y(t) + y\left(\frac{t}{2}\right)(1 - y\left(\frac{t}{2}\right)), 0 \leq t \leq 1, y(0) = 1. \quad (2.25)$$

مساوات (2.25) ریگٹی ڈیفرنشیل مساوات کے متناسب تاخیر کی ایک مثال ہے اور یہ متواتر حل رکھتی ہے۔

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{2}t}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{2}t}{4}\right).$$

سب سے پہلے، ہم (2.25) کو الجبری مساوات کے درج ذیل نظام میں تبدیل کریں گے،

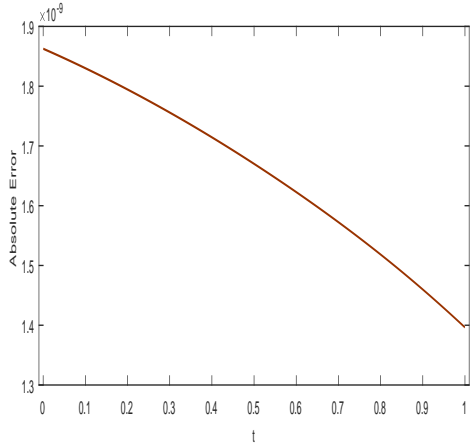
$$\sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(t_l) - \frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^{2M} a_i I_1 h_i(t_l) + 1 \right] - \left[\sum_{i=1}^{2M} a_i I_1 h_i\left(\frac{t_l}{2}\right) + 1 \right] \left[1 - \left(\sum_{i=1}^{2M} a_i I_1 h_i\left(\frac{t_l}{2}\right) + 1 \right) \right] = 0. \quad (2.26)$$

الجبری مساوات کے نظام کو (2.26) میں حل کرنے پر، ہم نے Haar coefficients a_i کی قدریں حاصل کی۔ a_i کی قدروں کے ساتھ دی گئی ابتدائی حالت $y(0) = 1$ کو (2.14) میں استعمال کرنا پر (2.25) کا

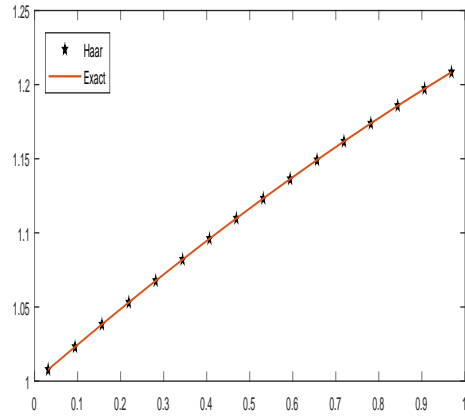
ٹیبل 2.7: J کی مختلف سطحوں پر
عظیم مطلق غلطیاں (مسئلہ 6)۔

ٹیبل 2.6: J کی مختلف سطحوں پر
عظیم مطلق غلطیاں (مسئلہ 5)۔

عظیم مطلق غلطی	J کی قدر	عظیم مطلق غلطی	J کی قدر
$5.8484E - 04$	4	$3.0352E - 05$	3
$1.5242E - 04$	5	$7.6091E - 06$	4
$3.8914E - 05$	6	$1.9048E - 06$	5
$9.8315E - 06$	7	$4.7652E - 07$	6
$2.4709E - 06$	8	$1.1917E - 07$	7
$6.1935E - 07$	9	$7.4500E - 09$	8



تصویر 2.7: مطلق غلطی (مسئلہ 5)
پر $J = 10$ ۔

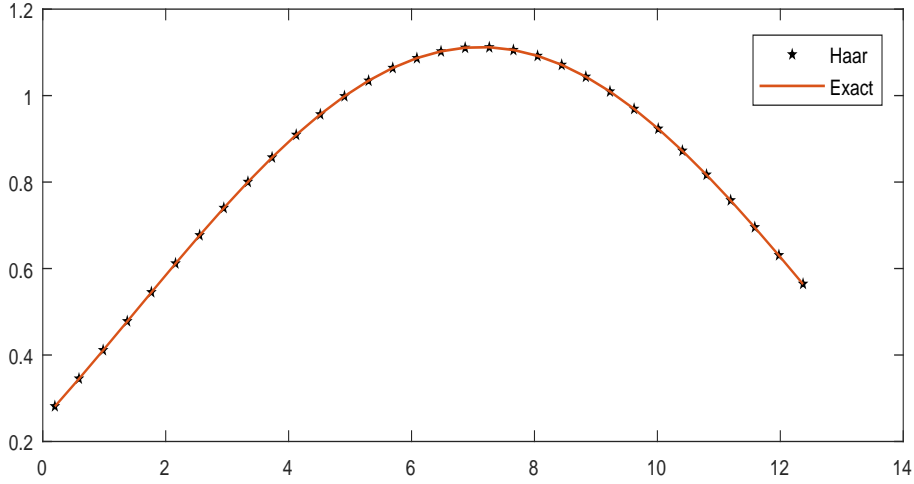


تصویر 2.6: درست اور عددی حل
کے درمیان موازنہ (مسئلہ 5)۔

تقریبی عددی حل حاصل کیا ہے۔ J کی مختلف اقدار کے لیے عظیم مطلق غلطی ٹیبل 2.6 میں پیش کی گئی ہے اور عظیم مطلق غلطی برائے $J = 8$ $7.4500E - 09$ ہے۔ آخر میں، $J = 3$ پر عین حل اور عددی حل کے درمیان موازنہ کو تصویر 2.6 میں دکھایا گیا ہے۔ ہم نے مشاہدہ کیا کہ J کی قدر میں اضافے کے ساتھ ایک بہتر تقریب حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 6۔ درج ذیل تاخیر کی مساوات کو حل کریں۔

$$y'(t) = -\frac{1}{8}y(t) + y\left(\frac{t}{2}\right)\left(1 - y\left(\frac{t}{2}\right)\right), 0 \leq t \leq 4\pi, y(0) = \frac{1}{4}. \quad (2.27)$$



تصویر 2.8: عین اور عددی حل کے درمیان موازنہ (مسئلہ 6)۔

نوٹ کریں کہ (2.27) متناسب تاخیر ترتیب Riccati ڈیفرنشیل مساوات ہے۔ اس مسئلہ کا صحیح حل ہے

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\sqrt{5}t}{8}\right) + \frac{\sqrt{5}}{4} \sin\left(\frac{\sqrt{5}t}{8}\right).$$

سیکشن 3 میں مذکور عددی تکنیک کو لاگو کرنے پر J کی مختلف اقدار پر عین حل اور عددی حل کے درمیان عظیم مطلق غلطی کو ٹیبل 2.7 میں درج کیا گیا ہے۔ جدول 2.7 سے ہم نے مشاہدہ کیا ہے کہ ریزولوشن میں اضافے کے ساتھ عظیم مطلق غلطی کم ہوتی ہے۔ عظیم مطلق خامی 10^{-4} کے آرڈر سے گھٹ کر 10^{-7} تک پہنچ جاتی ہے اور کنورجنس کی شرح 2 تک پہنچ جاتی ہے جو کہ بیان کردہ نظریاتی نتائج کی پیروی کرتا ہے [68]۔

$J = 4$ پر عین حل اور عددی حل کے درمیان موازنہ تصویر 2.8 میں دکھایا گیا ہے۔

2.5 خلاصہ

ہارویولیت طریقہ کو کامیابی کے ساتھ ریکائی ڈیفرنشیل مساوات اور متناسب تاخیر ریکائی ڈیفرنشیل مساوات کے عددی حل کو تلاش کرنے کے لیے لاگو کیا گیا ہے اور لٹریچر سے متعدد مسائل حل کیے گئے ہیں۔ عددی نتائج کا موازنہ Bezier Curves طریقہ اور عین حل کے درمیان موازنہ کیا ہے اور عددی نقالی واضح طور پر اس بات کی نشاندہی کرتا ہے کہ ہماری حساب کتاب درستگی اور ہم آہنگی کے لحاظ سے بہتر ہے۔

باب 3

ہارویولیت کا استعمال کرتے ہوئے مناسب تاخیر ڈیرپچلیٹ باؤنڈری ویلیو مسائل کا حل۔

3.1 تعارف

ہارویولیت کے مسائل (BVPs) تمام اپلائڈ سائنسز میں رائج ہیں۔ ڈیفرنشیل مساوات کی اس شاخ کی بڑھتی ہوئی مقبولیت نے متعدد محققین کو ریاضی کے آلات اور کمپیوٹر سمولیشن سافٹ ویئر کا استعمال کرتے ہوئے مختلف طبعی ماڈلز کی تحقیق کرنے پر اکسایا ہے۔ سائنس اور ٹکنالوجی میں بہت سے مسائل جیسے نینو میٹریل کے مکینکل رویے کا مطالعہ نینو مکینکس [42]، ٹربلنس ماڈلنگ [58]، کیمیکل ری ایکٹرز کی ماڈلنگ [47]، کیمیکل انجینئرنگ [12] میں مالیکیولر ڈھانچے کا مطالعہ، حرارت کی منتقلی کا ماڈل اور کیبلز میں انحطاط کا مطالعہ ریاضیاتی طور پر BVPs میں دوسرے آرڈر کے ڈیفرنشیل مساوات سے وضع کیا جا سکتا ہے۔ BVPs کی ایک اور پہلی کیشن ریاضیاتی ماڈلنگ ڈیزائن میں ظاہر ہوتی ہے تاکہ سمارٹ میٹریل [69] کی حقیقی میکانی خصوصیات کو ظاہر کیا جاسکے۔ سمارٹ میٹریل جسے 21 ویں صدی کا دانشورانہ مواد بھی کہا جاتا ہے ایک ایسا مواد ہے جس میں شکل کے میموری اثرات ہیں۔ اس طرح کے مواد کو طب، انجینئرنگ، ہوائی جہاز کی تعمیر، تعمیرات وغیرہ میں بڑے پیمانے پر استعمال کیا جاتا ہے۔

اس مطالعہ کا بنیادی فوکس دو نکاتی ہارویولیت ویلیو کے مسئلے کے درج ذیل مناسب تاخیر کی شکل کو حل کرنے کے لیے ہارویولیت پر بنی عددی تکنیک تیار کرنا ہے۔

$$y''(t) = \Omega(t, y(t), y(qt), y'(t), y'(qt)), \quad t \in [0, 1], \quad (3.1)$$

$$y(0) = \zeta_1, \quad y(1) = \zeta_2$$

جہاں $q \in (0, 1)$ اور ζ_1, ζ_2 اختیاری مستقل ہیں۔ تاخیر کی ڈیفرنشیل مساوات کی مناسب تاخیر (proportional delay) شکل کو عام طور پر پینٹوگراف مساوات کہا جاتا ہے۔ پینٹوگراف کا نام اوکینڈن اور ٹیلر کے پہلے کام سے آیا ہے جو الیکٹرک لو کو موٹو کے پینٹوگراف ہیڈ کے ذریعہ کرنٹ جمع کرنے کے لئے ہے۔ اس طرح کے نظام اسپلی کیشنز کی وسیع رینج میں ظاہر ہوتے ہیں جیسے کہ انکولی کنٹرول، نمبر تھیوری، الیکٹروڈائنامکس، فلکی طبیعیات، غیر خطی ڈائنامکس، الجبری ڈھانچے پر امکانی نظریہ، کو انٹیم میکائیکس، انجینئرنگ، معاشیات، اور اسی طرح [13, 35, 36, 111]۔ بہت سی صورتوں میں، تاخیر کے فرق والے ماڈلز کی اکثریت کا صحیح حل حاصل کرنا مشکل ہے نتیجے کے طور پر، اس طرح کی مساواتوں کے حل نے محققین میں کافی دلچسپی پیدا کی ہے اور انہوں نے ان مساواتوں کے حل کا تقریب لگانے کے لیے متعدد عددی نقطہ نظر استعمال کیے ہیں۔ اگر وال اور چاؤ نے منحرف دلیل [3] کے ساتھ دو نکاتی باؤنڈری ویلیو کے مسائل کا تقریبی حل پیش کرنے کے لیے محدود فرق کے طریقہ کار کو بڑھایا۔ لی اور لیو نے رنج-کٹ اسکیم [61] پر بنی کثیر پینٹوگراف تاخیر کی مساوات کو حل کرنے کے لیے ایک نیا عددی نقطہ نظر پیش کیا۔ شکیری وغیرہ۔ کچھ تاخیر کی ڈیفرنشیل مساوات کو حل کرنے کے لیے homotopy perturbation طریقہ (HPM) کا استعمال کیا [100]۔ عمومی پینٹوگراف مساوات کو حل کرنے کے لیے، سعادت مندی وغیرہ۔ Lagrange multipliers پر بنی تغیراتی تکرار اسکیم (VIM) [93] استعمال کیا۔ VIM اور HPM درست نتائج دیتے ہیں، لیکن علامتی اینیگریشن کے استعمال کی وجہ سے کمپیوٹیشنل لاگت زیادہ ہے۔ شکیری اور دہغان نے adomain decomposition طریقہ [99] کا استعمال کرتے ہوئے تاخیر کی ڈیفرنشیل مساوات کے عددی حل کی چھان بین کی ہے۔ سدگھاٹ وغیرہ [96] نے تاخیر کی ڈیفرنشیل مساوات کے تقریبی حل کے لیے Chebyshev کثیر رکنی الثانی پر بنی عددی طریقہ اپنایا۔ طریقہ [96] کا مقصد آپریشنل میٹرکس اور اس کے مشتق کو استعمال کرنا ہے تاکہ مسئلے کو الجبری مساوات کی ایک سیریز میں آسان بنایا جاسکے جس سے حل نکالا جاسکتا ہے۔ [15, 33, 112, 115] کے مصنفین نے ماضی قریب میں تصادم کے طریقہ کار پر بنی کچھ عددی تکنیک تیار کی ہیں۔ یہ تکنیکیں proportional delay ڈیفرنشیل مساوات کی چھان بین کے لیے کافی موثر ہیں۔ مصنفین مذکورہ بالا نتائج سے متاثر ہوئے ہارویولٹ سیریز کے نقطہ نظر کو وسعت دینے کے لیے مناسب تاخیر ڈیفرینشل باؤنڈری ویلیو مسائل کے تقریبی عددی حل نکالنے کی دلچسپی ظاہر کی ہے۔ یہ طریقہ باؤنڈری ویلیو کے مسائل کو حل کرنے کے لیے انتہائی مفید ہے کیونکہ یہ

ہاؤنڈری کنڈیشن کو خود بخود سمجھتا ہے۔ مزید برآں، محدود تعداد میں گرڈپوائنٹس کے لیے، اعلیٰ درستگی قابل حصول ہے۔

3.2 طریقہ کی تعمیر

ہم پینٹوگراف کی ذیل میں دی گئی قسم کے ہاؤنڈری ویلیو کے مسئلے پر غور کرتے ہیں:

$$y''(t) = \Omega(t, y(t), y(qt), y'(t), y'(qt)), \quad t \in [0, 1],$$

ڈیرپچلیٹ ہاؤنڈری کنڈیشن

(3.2)

$$y(0) = \zeta_1, \quad y(1) = \zeta_2,$$

کے ساتھ۔

جہاں $q \in (0, 1)$ اور ζ_1, ζ_2 اختیاری مستقل ہیں۔ ہارویولٹ سیریز کی تکنیک کو لاگو کرنے کے لیے، سب سے پہلے ہم کٹے ہوئے ہارویولٹ سیریز کے لحاظ سے $y''(t)$ کا تقریب اس طرح لگاتے ہیں:

$$y''(t) = \sum_{i=0}^{2J+1} a_i h_i(t). \quad (3.3)$$

مساوات (3.3) کو t to 0 انٹیگریٹ کرنے پر، ہمیں ملتا ہے

$$y'(t) = \sum_{i=0}^{2J+1} a_i I_1 h_i(t) + y'(0). \quad (3.4)$$

مزید انٹیگریٹیشن دیتا ہے،

$$y(t) = \sum_{i=0}^{2J+1} a_i I_2 h_i(t) + y'(0)t + y(0). \quad (3.5)$$

مقدار $y'(0)$ مساوات میں (3.4) اور (3.5) کا ابھی تعین ہونا باقی ہے۔ مساوات (3.4) کا انٹیگریشن t to 1، دیتا ہے

$$-y(t) = \sum_{i=0}^{2^{J+1}} a_i I_2 h_i(1) - \sum_{i=0}^{2^{J+1}} a_i I_2 h_i(t) + y'(0)(1-t) - y(1). \quad (3.6)$$

اب، مساوات (3.5) اور (3.6) سے ہمیں ملتا ہے،

$$y'(0) = -\sum_{i=0}^{2^{J+1}} a_i I_2 h_i(1) - y(0) + y(1).$$

اب $y(0) = \zeta_1$ ، $y(1) = \zeta_2$ کا استعمال مساوات (3.5) میں کرنے پر ہمیں مندرجہ ذیل مساوات ملتی ہے۔

$$y(t) = \sum_{i=0}^{2^{J+1}} a_i I_2 h_i(t) + \left(-\sum_{i=0}^{2^{J+1}} a_i I_2 h_i(1) - \zeta_1 + \zeta_2 \right) t + \zeta_1. \quad (3.7)$$

اس کے علاوہ،

$$y(qt) = \sum_{i=0}^{2^{J+1}} a_i I_2 h_i(qt) + \left(-\sum_{i=0}^{2^{J+1}} a_i I_2 h_i(1) - \zeta_1 + \zeta_2 \right) (qt) + \zeta_1. \quad (3.8)$$

اسی طرح، $y'(0) = -\sum_{i=0}^{2^{J+1}} a_i I_2 h_i(1) - y(0) + y(1)$ ، $y(0) = \zeta_1$ ، $y(1) = \zeta_2$ مساوات (3.4) میں رکھنے پر ہمیں ملتا ہے،

$$y'(t) = \sum_{i=0}^{2^{J+1}} a_i I_1 h_i(t) - \sum_{i=0}^{2^{J+1}} a_i I_2 h_i(1) - \zeta_1 + \zeta_2, \quad (3.9)$$

اور

$$y'(qt) = \sum_{i=0}^{2^{J+1}} a_i I_1 h_i(qt) - \sum_{i=0}^{2^{J+1}} a_i I_2 h_i(1) - \zeta_1 + \zeta_2. \quad (3.10)$$

مساوات (3.3) اور مساوات (3.7) سے (3.10) کو مساوات (3.2) سے بدلنے پر، ہمارے پاس ہے۔

$$\sum_{i=0}^{2^{J+1}} a_i h_i(t) = \Omega \left(t, \left[\sum_{i=0}^{2^{J+1}} a_i I_2 h_i(t) + \left(- \sum_{i=0}^{2^{J+1}} a_i I_2 h_i(1) - \zeta_1 + \zeta_2 \right) t + \zeta_1 \right], \right. \\ \left. \left[\sum_{i=0}^{2^{J+1}} a_i I_2 h_i(qt) + \left(- \sum_{i=0}^{2^{J+1}} a_i I_2 h_i(1) - \zeta_1 + \zeta_2 \right) (qt) + \zeta_1 \right], \left[\sum_{i=0}^{2^{J+1}} a_i I_1 h_i(t) - \sum_{i=0}^{2^{J+1}} a_i I_2 h_i(1) - \zeta_1 + \zeta_2 \right], \right. \\ \left. \left[\sum_{i=0}^{2^{J+1}} a_i I_1 h_i(qt) - \sum_{i=0}^{2^{J+1}} a_i I_2 h_i(1) - \zeta_1 + \zeta_2 \right] \right). \quad (3.11)$$

ڈسکریٹائزیشن کے طریقہ کار کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا مساوات کو $a_i s$ کے الجبری نظام میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ نیوٹن کے تکراری طریقہ یا کسی دوسرے مناسب طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے $a_i s$ کا تعین کرنے کے بعد ہمیں مساوات (3.7) سے تقریب حل ملتا ہے۔

3.3 عددی مثالیں

مسئلہ 1- باؤنڈری ویلیو کے مسئلے پر غور کریں۔

$$y''(t) - 1 - 2(1 + t^2/8)\cos(t/2) + 2\cos(t/2)y(t/2) = 0, \quad t \in [0, 1], \\ \text{ڈیرپچلیٹ باؤنڈری کنڈیشن} \\ y(0) = 1, \quad y(1) = \frac{3}{2} + \sin(1) \quad (3.12) \\ \text{کے ساتھ.}$$

اس مسئلے کا صحیح حل $y(t) = \frac{t^2}{2} + \sin(t) + 1$ ہے۔

مسئلہ 2- باؤنڈری ویلیو کے مسئلے پر غور کریں۔

$$y''(t) + 2e^{-t} - y(t)/2 - e^{-t/2}y(t/2) = 0, \quad t \in [0, 1], \\ \text{ڈیرپچلیٹ باؤنڈری کنڈیشن} \\ y(0) = 0, \quad y(1) = e^{-1}, \quad (3.13) \\ \text{کے ساتھ.}$$

اس مسئلے کا صحیح حل $y(t) = te^{-t}$ ہے۔

مسئلہ 3۔ ہاؤنڈری ویلیو کا مسئلہ فرض کریں۔

$$y''(t) - 4e^{-t/2} \sin(t/2)y(t/2) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

ڈیرپچلیٹ ہاؤنڈری کنڈیشن

$$y(0) = 1, \quad y(1) = e^{-1} \cos(1),$$

کے ساتھ۔

اس مسئلے کا صحیح حل $y(t) = e^{-t} \cos(t)$ ہے۔

مسئلہ 4۔ غیر خطی ہاؤنڈری ویلیو کے مسئلے کو بطور فرض کریں۔

$$y''(t) - ([y(t)]^2 + [y(t)]^3)y(t/2) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

ڈیرپچلیٹ ہاؤنڈری کنڈیشن

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 1/2,$$

کے ساتھ۔

مذکورہ بالا غیر خطی ہاؤنڈری ویلیو مسئلہ کا صحیح حل $y(t) = \frac{1}{t+1}$ ہے۔

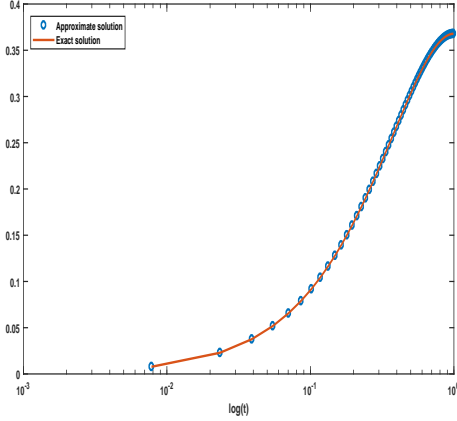
مسئلہ 5۔ آئیے درج ذیل دو پوائنٹ ہاؤنڈری ویلیو کے مسئلے پر غور کریں۔

$$y''(t) - y'(t)y(t/2) + 8t^2y(t/2) + \Theta(t) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

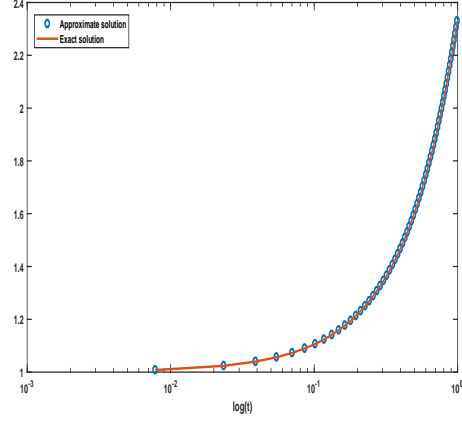
ڈیرپچلیٹ ہاؤنڈری کنڈیشن

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 3,$$

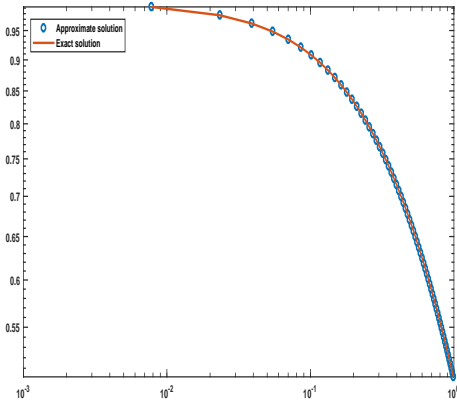
کے ساتھ۔



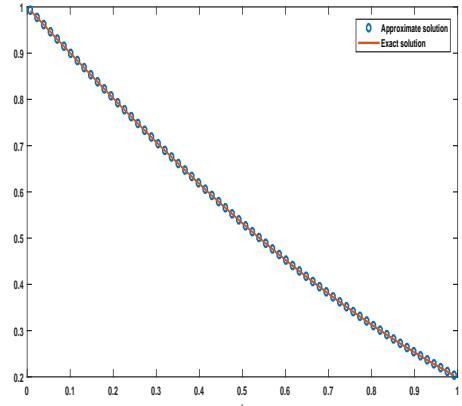
تصویر 3.2: مسئلہ 2 کے لیے پلاٹ
پر $J = 5$



تصویر 3.1: مسئلہ 1 کے لیے پلاٹ
پر $J = 5$



تصویر 3.4: مسئلہ 4 کے لیے پلاٹ
پر $J = 5$

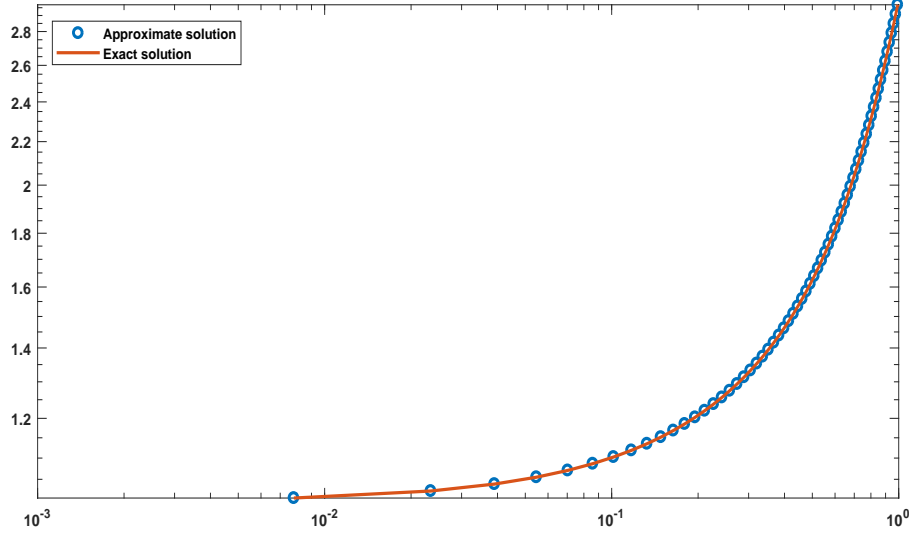


تصویر 3.3: مسئلہ 3 کے لیے پلاٹ
پر $J = 5$

اور $\theta(t)$ کا انتخاب اس طرح کیا گیا ہے کہ مذکورہ بالا غیر خطی باؤنڈری ویلیو کے مسئلے کا صحیح حل $y(t) = 1 + t + t^3$ ہے۔

3.4 نتائج اور مباحث

مندرجہ بالا مسائل کو ہارویولٹ سیریز کے طریقہ کار سے حل کیا گیا ہے۔ عظیم مطلق غلطی اور تجرباتی ہم آہنگی کی شرح ہر مسئلے کے لیے مختلف ریزولوشنز (J) پر شمار کی ہے۔ یہ نتائج ٹیبلز 3.1-3.8 میں پیش کیے گئے ہیں۔ ٹیبل 3.1 ظاہر کرتا ہے کہ ریزولوشن (J) میں اضافے کے ساتھ خرابی کم ہوتی ہے۔ ٹیبل 3.3

تصویر 3.5: مسئلہ 5 کے لیے پلاٹ $J = 5$ پر

ٹیبل 3.1: مسائل 1 سے 5 کے لیے عظیم مطلق غلطی۔

مسئلہ 5	مسئلہ 4	مسئلہ 3	مسئلہ 2	مسئلہ 1	J
$2.6907E - 03$	$9.4871E - 04$	$5.8345E - 04$	$5.5835E - 04$	$1.5997E - 04$	1
$6.6283E - 04$	$2.7026E - 04$	$1.6306E - 04$	$1.5644E - 04$	$4.4574E - 05$	2
$1.6553E - 04$	$7.0508E - 05$	$4.1522E - 05$	$3.9757E - 05$	$1.1324E - 05$	3
$4.1311E - 05$	$1.7787E - 05$	$1.0454E - 05$	$1.0014E - 05$	$2.8500E - 06$	4
$1.0331E - 05$	$4.4582E - 06$	$2.6172E - 06$	$2.5082E - 06$	$7.1382E - 07$	5
$2.5828E - 06$	$1.1152E - 06$	$6.5449E - 07$	$6.2735E - 07$	$1.7831E - 07$	6
$6.4569E - 07$	$2.7884E - 07$	$1.6362E - 07$	$1.5692E - 07$	$4.4275E - 08$	7
$1.6142E - 07$	$6.9712E - 08$	$4.0890E - 08$	$3.9226E - 08$	$1.1342E - 08$	8
$4.0355E - 08$	$1.7427E - 08$	$1.0218E - 08$	$9.8905E - 09$	$2.6235E - 09$	9
$1.0088E - 08$	$4.3559E - 09$	$2.5589E - 09$	$2.4508E - 09$	$6.9708E - 10$	10

ٹیبل 3.2: غلطیوں کا موازنہ۔

[17]Bica	HWS	مسئلہ
$6.9097E - 07$ at $h = \frac{\pi}{400}$	$1.7831E - 07$ at $J = 6$	1
$6.9100E - 09$ at $h = \frac{\pi}{4000}$	$6.9708E - 10$ at $J = 10$	1
$1.2770E - 08$ at $h = \frac{1}{1000}$	$9.8905E - 09$ at $J = 9$	2

ٹیبل 3.3: کنورجنس کی شرح $R_c = \frac{\log(\frac{\text{error}(J-1)}{\text{error}(J)})}{\log(2)}$ مسائل 1 سے 5 کے لیے۔

مسئلہ 5	مسئلہ 4	مسئلہ 3	مسئلہ 2	مسئلہ 1	J
2.0213	1.8116	1.8392	1.8356	1.8435	1
2.0015	1.9385	1.9735	1.9763	1.9768	2
2.0025	1.9870	1.9898	1.9892	1.9903	3
1.9995	1.9963	1.9980	1.9973	1.9973	4
2.0000	1.9992	1.9996	1.9993	2.0012	5
2.0000	1.9998	2.0000	1.9992	2.0098	6
2.0000	2.0000	2.0005	2.0001	1.9648	7
2.0000	2.0001	2.0006	1.9877	2.1121	8
2.0001	2.0003	1.9975	2.0128	1.9121	9
					10

ٹیبل 3.4: $J = 6$ پر تقریب اور درست حل کے درمیان موازنہ۔

مسئلہ 1				
$ y_{exact} - y_{approx} $	y_{approx}	y_{exact}	t	
$4.9295E - 08$	1108.1	1108.1	1.0	
$9.3465E - 08$	2270.1	2270.1	2.0	
$1.2867E - 07$	3415.1	3415.1	3.0	
$1.5786E - 07$	4725.1	4725.1	4.0	
$1.7498E - 07$	6098.1	6098.1	5.0	
$1.7727E - 07$	7524.1	7524.1	6.0	
$1.6214E - 07$	8995.1	8995.1	7.0	
$1.3054E - 07$	0385.2	0385.2	8.0	
$7.5335E - 08$	1919.2	1919.2	9.0	

ٹیبل 3.5: $J = 6$ پر تقریب اور درست حل کے درمیان موازنہ۔

مسئلہ 2				
$ y_{exact} - y_{approx} $	y_{approx}	y_{exact}	t	
$2.8670E - 07$	$9.4912E - 02$	$9.4912E - 02$	1.0	
$4.7186E - 07$	$1.6832E - 01$	$1.6832E - 01$	2.0	
$5.7505E - 07$	$2.2265E - 01$	$2.2265E - 01$	3.0	
$6.2395E - 07$	$2.6907E - 01$	$2.6907E - 01$	4.0	
$6.1674E - 07$	$3.0444E - 01$	$3.0444E - 01$	5.0	
$5.6142E - 07$	$3.3048E - 01$	$3.3048E - 01$	6.0	
$4.6471E - 07$	$3.4864E - 01$	$3.4864E - 01$	7.0	
$3.4350E - 07$	$3.5953E - 01$	$3.5953E - 01$	8.0	
$1.8183E - 07$	$3.6601E - 01$	$3.6601E - 01$	9.0	

ٹیبل 3.6: $J = 6$ پر تقریب اور درست حل کے درمیان موازنہ۔

مسئلہ 3			
$ y_{exact} - y_{approx} $	y_{approx}	y_{exact}	t
$3.0232E - 07$	$8.9490E - 01$	$8.9490E - 01$	1.0
$4.9807E - 07$	$7.9563E - 01$	$7.9563E - 01$	2.0
$6.0542E - 07$	$7.0701E - 01$	$7.0701E - 01$	3.0
$6.5268E - 07$	$6.1535E - 01$	$6.1535E - 01$	4.0
$6.3862E - 07$	$5.2907E - 01$	$5.2907E - 01$	5.0
$5.7344E - 07$	$4.4879E - 01$	$4.4879E - 01$	6.0
$4.6661E - 07$	$3.7491E - 01$	$3.7491E - 01$	7.0
$3.3853E - 07$	$3.1255E - 01$	$3.1255E - 01$	8.0
$1.7510E - 07$	$2.5139E - 01$	$2.5139E - 01$	9.0

ٹیبل 3.7: $J = 6$ پر تقریب اور درست حل کے درمیان موازنہ۔

مسئلہ 4			
$ y_{exact} - y_{approx} $	y_{approx}	y_{exact}	t
$7.0007E - 07$	$9.0459E - 01$	$9.0459E - 01$	1.0
$1.0092E - 06$	$8.2848E - 01$	$8.2848E - 01$	2.0
$1.1088E - 06$	$7.6877E - 01$	$7.6877E - 01$	3.0
$1.0937E - 06$	$7.1309E - 01$	$7.1309E - 01$	4.0
$9.9756E - 07$	$6.6493E - 01$	$6.6494E - 01$	5.0
$8.4864E - 07$	$6.2287E - 01$	$6.2287E - 01$	6.0
$6.6355E - 07$	$5.8581E - 01$	$5.8581E - 01$	7.0
$4.6913E - 07$	$5.5531E - 01$	$5.5531E - 01$	8.0
$2.3844E - 07$	$5.2567E - 01$	$5.2567E - 01$	9.0

ٹیبل 3.8: $J = 6$ پر تقریب اور درست حل کے درمیان موازنہ۔

مسئلہ 5			
$ y_{exact} - y_{approx} $	y_{approx}	y_{exact}	t
$7.4140E - 07$	1066.1	1066.1	1.0
$1.3630E - 06$	2159.1	2159.1	2.0
$1.8446E - 06$	3280.1	3280.1	3.0
$2.2490E - 06$	4675.1	4675.1	4.0
$2.5062E - 06$	6319.1	6319.1	5.0
$2.5806E - 06$	8274.1	8274.1	6.0
$2.4239E - 06$	0605.2	0605.2	7.0
$2.0191E - 06$	3143.2	3143.2	8.0
$1.2202E - 06$	6371.2	6371.2	9.0

میں ہم نے فارمولے کا استعمال کرتے ہوئے کنورجنس کی شرح کا حساب لگایا ہے

$$R_c = \frac{\log\left(\frac{E_{J-1}}{E_J}\right)}{\log(2)},$$

جہاں E_J ریزولوشن J پر عظیم مطلق غلطی ہے۔ اس کے علاوہ، ٹیبل 3.3 سے کوئی یہ مشاہدہ کر سکتا ہے کہ ہر مسئلے میں تجرباتی کنورجنس کی شرح 2 کے قریب ہے جیسا کہ [67] میں بیان کیا گیا ہے، ہر مسئلے کا تقریب اور درست حل تصویر 3.1-3.5 میں بنایا گیا ہے۔ ہم نے مشاہدہ کیا کہ دونوں گراف اتفاق کرتے ہیں اور ٹیبل 3.2 میں تیار کردہ موازنہ سے پتہ چلتا ہے کہ طریقہ زیادہ درست اور موثر ہے۔

3.5 خلاصہ

اس باب نے ڈیرپچلیٹ باؤنڈری ویلیو کے مسائل کو حل کرنے کے لیے ہارویولٹ پر مبنی عددی طریقہ متعارف کرایا ہے۔ طریقہ کو بیچ مارک کے مسائل پر آزمایا جاتا ہے اور نتائج کا موازنہ موجودہ طریقہ [17] سے کیا گیا ہے۔ خطی اور غیر خطی نوعیت دونوں کو حل کر کے تکنیک کی درستگی اور کنورجنس کی شرح کی توثیق کی گئی ہے۔ MATLAB 2017 پیکیج کا استعمال کمپیوٹر سمولیشن کو انجام دینے کے لیے کیا گیا ہے اور حاصل کردہ حلوں کا عین حل کے ساتھ موازنہ بھی کیا ہے۔

باب 4

سائیمیلٹینیوس متناسب تاخیر ڈیفرینشیل مساوات کو حل کرنے کے لیے ہارویولٹ سیریز کا طریقہ

4.1 تعارف

اس مطالعہ میں، ہم مندرجہ ذیل سائیمیلٹینیوس متناسب تاخیر ڈیفرینشیل مساوات کو حل کرنے کے لیے ہارویولٹ سیریز طریقہ (HWSM) کا اطلاق کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \Omega_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t), y_1(q_1t), y_2(q_2t), \dots, y_n(q_\lambda t)) \\ y_2'(t) &= \Omega_2(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t), y_1(q_1t), y_2(q_2t), \dots, y_n(q_\lambda t)) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= \Omega_n(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t), y_1(q_1t), y_2(q_2t), \dots, y_n(q_\lambda t)) \\ y_\sigma(0) &= y_{\sigma 0}, \quad \sigma = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \tag{4.1}$$

جہاں Ω_σ 's اینالیٹک فنکشنس ہیں۔ اور $q_\sigma \in (0, 1), \sigma = 1, 2, \dots, n$ ۔

یہ مساوات کئی ماڈلز میں بڑے پیمانے پر دیکھی گئی ہیں جیسے کہ حیاتیاتی ماڈل، ایرو اسپیس سسٹم، کنٹرول تھیوری، بیماری کے پھیلاؤ کے ماڈل، ٹیومر کی نشوونما کے ماڈلز وغیرہ۔ اس لیے یہ مطالعہ اپلائڈ میٹھیٹیکل ماڈلنگ اور عددی تجزیہ کے میدان میں ایک اہم شراکت ہے۔ یہ طریقہ تاخیر ہارویولٹ سیریز اور کولکیشن پوائنٹس کا استعمال کرتا ہے تاکہ متناسب تاخیر ڈیفرینشیل مساوات کو الجبری میٹرکس مساوات کے ایک نظام

میں تبدیل کیا جاسکے۔

4.2 طریقہ کار کی تفصیل

اس سیکشن میں، ہم سائیملٹینوس تناسب تاخیر ڈیفریئنشل مساوات (4.1) کو حل کرنے کے لیے ہارویولٹ سیریز کا طریقہ استعمال کرتے ہیں۔
فرض کرو

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \sum_{i=1}^{2^{J+1}} a_i h_i(t), \\ y_2'(t) &= \sum_{i=1}^{2^{J+1}} b_i h_i(t), \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= \sum_{i=1}^{2^{J+1}} c_i h_i(t), \end{aligned} \quad (4.2)$$

جہاں a_i 's, b_i 's ... c_i 's ہارویولٹ کو فیشنٹس ہیں۔

اب، مساوات (4.2) کو انٹیگریٹ کر کے، ہمارے پاس ہے۔

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \sum_{i=1}^{2^{J+1}} a_i I_1 h_i(t) + y_1(0), \\ y_2(t) &= \sum_{i=1}^{2^{J+1}} b_i I_1 h_i(t) + y_2(0), \\ &\vdots \\ y_n(t) &= \sum_{i=1}^{2^{J+1}} c_i I_1 h_i(t) + y_n(0). \end{aligned} \quad (4.3)$$

نیز،

$$\begin{aligned}
 y_1(q_1 t) &= \sum_{i=1}^{2^{J+1}} a_i I_1 h_i(q_1 t) + y_1(0), \\
 y_2(q_2 t) &= \sum_{i=1}^{2^{J+1}} b_i I_1 h_i(q_2 t) + y_2(0), \\
 &\vdots \\
 y_n(q_n t) &= \sum_{i=1}^{2^{J+1}} c_i I_1 h_i(q_n t) + y_n(0),
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

جہاں $y_\sigma(0)$'s ابتدائی حالت اور $q_\sigma \in (0, 1), \sigma = 1, 2, \dots, n$ ہے۔ اب، گورنگ مساوات (4.1) میں مساوات (4.2), (4.3) اور (4.4) کو کو لوکیشن پوائنٹس کے ساتھ رکھنے پر ہمیں الجبری مساوات کا ایک نظام ملتا ہے اس نظام کو حل کرنے کے بعد ہم نامعلوم ہارویولیت کو فیشنٹس حاصل کرتے ہیں اور آخر میں ان کو فیشنٹس کو (4.3) میں استعمال کرتے ہوئے تقریبی حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔

4.3 الگورتھم

ان پٹ: ریزولوشن کی سطح J .

مرحلہ نمبر 1: کو لوکیشن پوائنٹس سیٹ کریں۔ $t_l = \frac{(l-0.5)}{2^{J+1}}, l = 1, 2, 3 \dots 2^{J+1}$

مرحلہ 2: مساوات (2.5) اور (2.11) سے بالترتیب ہارویولیت h_i اور ہارویولیت کا اینٹیگرل $I_1 h_i$ شمار کریں۔

مرحلہ 3: فرض کریں $y'_\sigma(t) = \sum_{i=1}^{2^{J+1}} (a_i)_\sigma h_i(t)$ جہاں $\sigma = 1, 2, \dots, n$ اور i ویولیت اینڈیکس ہیں۔

مرحلہ 4: 0 سے t کی حدود میں مرحلہ 3 کا اینٹیگرل

$$y_\sigma(t) = \sum_{i=1}^{2^{J+1}} (a_i)_\sigma I_1 h_i(t) + y_\sigma(0), \quad \sigma = 1, 2, \dots, n$$

دیتا ہے۔

مرحلہ 5: مساوات (4.1) میں collocation پوائنٹس کے ساتھ $y'_\sigma(t), s, y_\sigma(t), s, \dots, y_\sigma(q_\sigma t), s$ کے لیے ایکسپریشنز استعمال کرنے پر، ہمیں نامعلوم ویکٹرز $(a_i)_1, (a_i)_2, \dots, (a_i)_n$ میں ایک الجبری نظام ملتا ہے۔

مرحلہ 6: نامعلوم ویکٹرز $(a_i)_1, (a_i)_2, \dots, (a_i)_n$ کے لیے الجبری نظام کو حل کریں۔

مرحلہ 7: نامعلوم فنکشن $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ حاصل کرنے کے لیے مرحلہ 4- میں ویکٹرز $(a_i)_1, (a_i)_2, \dots, (a_i)_n$ کی قدروں کو استعمال کریں۔

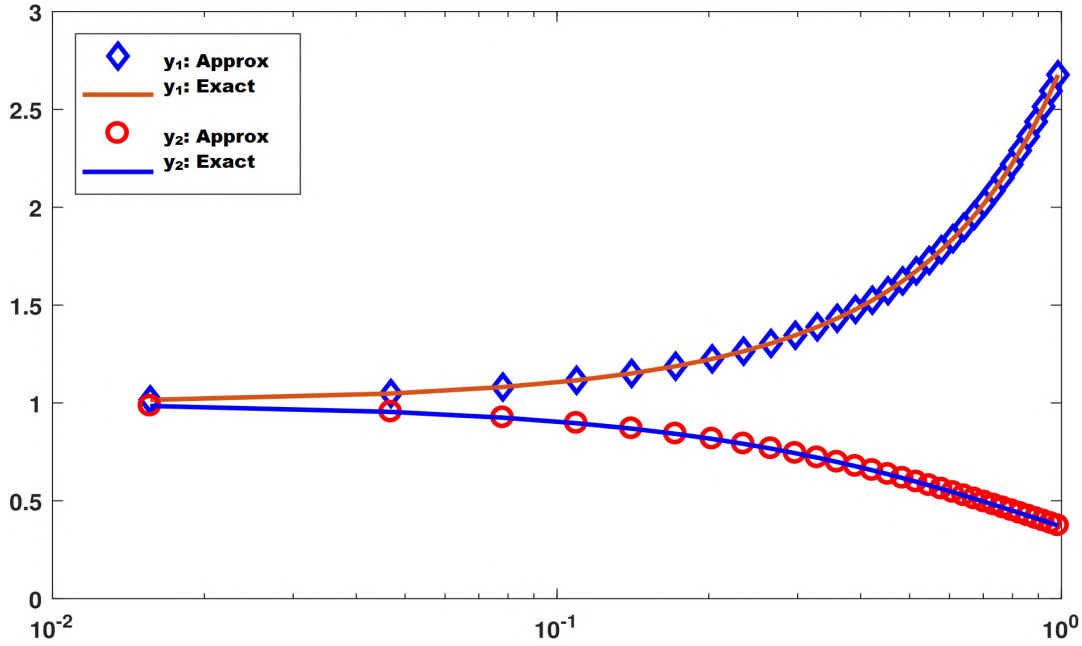
آؤٹ پٹ: تقریبی حل $y_1(t_l), y_2(t_l), \dots, y_n(t_l)$ حاصل کیا جاتا ہے۔

4.4 طریقہ کار پر عمل درآمد

طریقہ کار کی کارکردگی اور عددی توثیق کو درج ذیل ٹیسٹ کے مسائل کی مدد سے ظاہر کیا ہے۔
مسئلہ 1: درج ذیل مساوات پر غور کریں۔

$$\begin{cases} y'_1(t) = y_1(t/2) + y_1(t) - y_2(t) + \exp(-t) - \exp(t/2) \\ y'_2(t) = -y_1(t/2) - y_1(t) - y_2(t) + \exp(t) + \exp(t/2) \\ \text{with } y_1(0) = y_2(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (4.5)$$

مساوات کا صحیح حل $y_1(t) = \exp(t), y_2(t) = \exp(-t)$ ہے۔ ہم نے ہارویولیت سیریز کے طریقہ کار کا استعمال کرتے ہوئے ڈیفرینشیل مساوات کے مندرجہ بالا نظام کو حل کیا ہے۔ ریزولوشن کی مختلف سطحوں پر عظیم مطلق غلطی (MAE) ٹیبل 4.1 میں دی گئی ہے۔ یہ ٹیبل 4.1 سے دیکھا جاسکتا ہے کہ خرابی $O(10^{-2})$ سے $O(10^{-7})$ تک کم ہو جاتی ہے، جو طریقہ کار کی کنورجنس کو یقینی بناتی ہے۔ نیز، تصویر 4.1



تصویر 4.1: مسئلہ 1 کا درست اور تقریبی حل۔

سے پتہ چلتا ہے کہ تقریبی اور درست حل کافی حد تک میل کھاتا ہے۔
مسئلہ 2: درج ذیل مساوات پر غور کریں۔

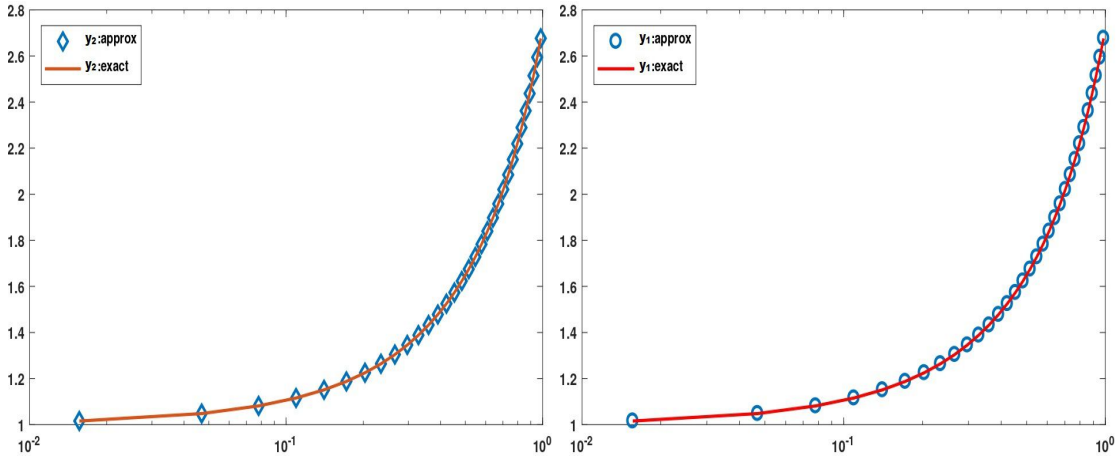
$$\begin{cases} y_1'(t) = \exp(t/2)y_2(t/2) + y_1(t) \\ y_2'(t) = \exp(t/2)y_1(t/2) + y_2(t) \end{cases} \quad (4.6)$$

with $y_1(0) = y_2(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$

مساوات کا صحیح حل $y_1(t) = \exp(t), y_2(t) = \exp(t)$ ہے۔ ہم نے ہارویولٹ سیریز کے طریقہ کار کا استعمال کرتے ہوئے ڈیفرینشیل مساوات کے مندرجہ بالا نظام کو حل کیا ہے۔ ریزولوشن کی مختلف سطحوں پر عظیم مطلق غلطی (MAE) ٹیبل 4.1 میں دی گئی ہے۔ تصویر 4.2 سے پتہ چلتا ہے کہ تقریبی اور درست حل کافی حد تک میل کھاتا ہے۔ اس کے علاوہ، طریقہ کار کی کنورجنس کو تصویر 4.4 میں دیکھا جا

ٹیبل 4.1: J کی مختلف سطحوں پر عظیم مطلق غلطی۔

مسئلہ 2		مسئلہ 1		
$y_2(t)$ MAE	$y_1(t)$ MAE	$y_2(t)$ MAE	$y_1(t)$ MAE	J
$7.3000E-03$	$7.3000E-03$	$5.4000E-03$	$1.3000E-02$	0.2
$1.9007E-03$	$1.9007E-03$	$1.4267E-03$	$3.4187E-03$	0.3
$4.8190E-04$	$4.8190E-04$	$3.6790E-04$	$8.7870E-04$	0.4
$1.2170E-04$	$1.2170E-04$	$9.3500E-05$	$2.2290E-04$	0.5
$3.0570E-05$	$3.0580E-05$	$2.3570E-05$	$5.6150E-05$	0.6
$7.6620E-06$	$7.6620E-06$	$5.9200E-06$	$1.4090E-05$	0.7
$1.9180E-06$	$1.9180E-06$	$1.4820E-06$	$3.5290E-06$	0.8
$4.7980E-07$	$4.7980E-07$	$3.7090E-07$	$8.8310E-07$	0.9



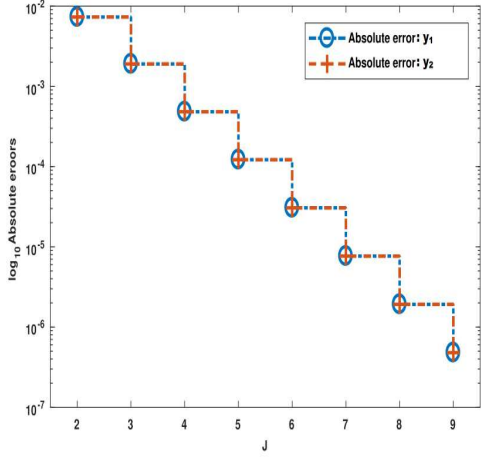
تصویر 4.2: مسئلہ 2 کا درست اور تقریبی حل۔

سکتا ہے۔

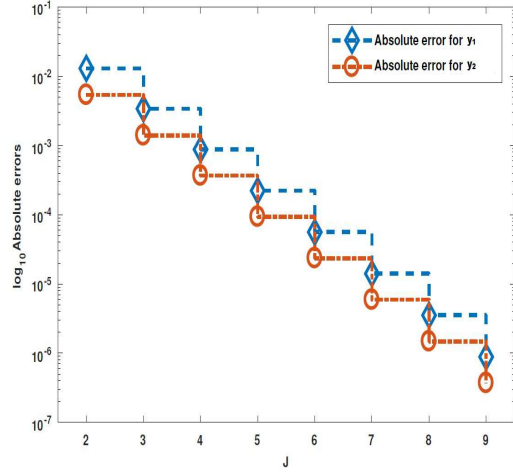
مسئلہ 3: درج ذیل غیر خطی متناسب تاخیر نظام پر غور کریں:

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2y_2(t/2) + y_3(t) + t\cos(t/2) \\ y_2'(t) = -2y_3^2(t) + 1 - t\sin(t) \\ y_3'(t) = y_2(t) - y_1(t) - t\cos(t) \end{cases} \quad (4.7)$$

with $y_1(0) = -1, y_2(0) = y_3(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1.$



تصویر 4.4: مطلق غلطی بمقابلہ J (مسئلہ 2)۔

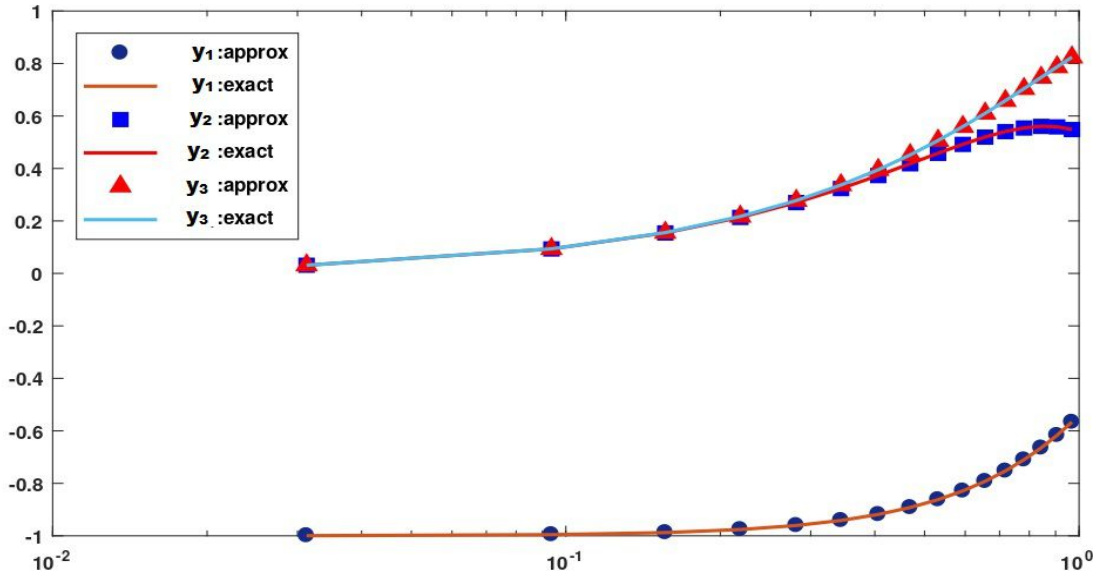


تصویر 4.3: مطلق غلطی بمقابلہ J (مسئلہ 1)۔

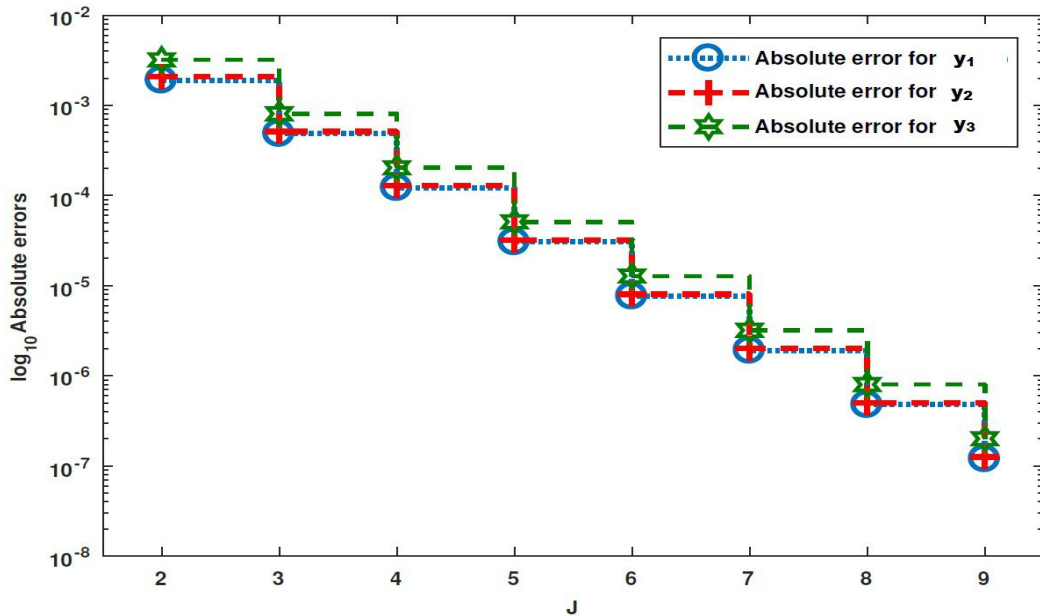
ٹیبل 4.2: J کی مختلف سطحوں پر عظیم مطلق غلطی (MAE) (مسئلہ 3)۔

$y_3(t)$ MAE	$y_2(t)$ MAE	$y_1(t)$ MAE	J
$3.1668E - 03$	$2.0504E - 03$	$1.9167E - 03$	2
$8.0760E - 04$	$5.1360E - 04$	$4.8600E - 04$	3
$2.0340E - 04$	$1.2850E - 04$	$1.2190E - 04$	4
$5.1000E - 05$	$3.2120E - 05$	$3.0510E - 05$	5
$1.2770E - 05$	$8.0300E - 06$	$7.6300E - 06$	6
$3.1930E - 06$	$2.0070E - 06$	$1.9070E - 06$	7
$7.9860E - 07$	$5.0190E - 07$	$4.7680E - 07$	8
$1.9970E - 07$	$1.2550E - 07$	$1.1920E - 07$	9

مساوات کا صحیح حل $y_1(t) = \sin(t)$, $y_2(t) = t\cos(t)$, $y_3(t) = -\cos(t)$ ہے۔ اس معاملے میں ہم نے ہارویولٹ سیریز کے طریقہ کار کا استعمال کرتے ہوئے ایک غیر خطی نظام کو حل کیا ہے جس میں تین مساوات ہیں۔ مسئلہ 3 کا درست اور تقریبی حل شکل 4.5 میں دکھایا گیا ہے۔ تصویر سے پتہ چلتا ہے کہ تقریبی اور درست حل کافی حد تک میل کھاتا ہے۔ ریزولوشن کی مختلف سطحوں پر مطلق غلطیوں کو ٹیبل 4.2 میں دکھایا گیا ہے جو ظاہر کرتا ہے کہ شمار شدہ عددی حل تسلی بخش ہے۔ نیز، یہ تصویر 4.6 سے واضح ہے کہ حل میں درستگی J کی قدروں کے براہ راست متناسب ہے۔ مزید یہ کہ، ہر کیس میں خرابی $O(10^{-2})$ سے $O(10^{-7})$ تک کم ہو گئی۔



تصویر 4.5: مسئلہ 3 کا درست اور تقریبی حل۔



تصویر 4.6: مطلق غلطی بمقابلہ J (مسئلہ 3)۔

4.5 خلاصہ

اس باب میں دو اور تین نامعلوم فنکشن والی خطی اور غیر خطی سائیملٹینوس تناسب تاخیر ڈیفرینشل مساوات کے لئے ہارویولٹ سیریز کے طریقہ کار پر تبادلہ خیال کیا گیا ہے۔ طریقہ کار کی مستقل مزاجی، درستگی اور افادیت کو جانچنے کے لیے تین مثالیں حل کی گئی ہیں۔ تصاویر اور جدولوں میں دکھائے گئے عددی نتائج کنورجنس کی متوقع شرح کو واضح کرتے ہیں۔

باب 5

الیکٹروڈائنامکس میں پیدا ہونے والی ہائی ترتیب ملٹی پینٹوگراف مساوات کے حل کیلئے ہارویولٹ سیریز طریقہ۔

5.1 پینٹوگراف مساوات

متناسب تاخیر کے ساتھ فنکشنل ڈیفرنشیل کوپینٹوگراف مساوات یا عمومی پینٹوگراف مساوات کے نام سے جانا جاتا ہے۔ پینٹوگراف کا نام پہلی بار 1851 میں ظاہر ہوا اور یہ ایک ایسا آلہ تھا جو الیکٹرک لو کو موٹو کی تعمیر میں استعمال ہوتا تھا۔ پینٹوگراف کا ریاضیاتی ماڈل سب سے پہلے اوکینڈن اور ٹائلر [79] نے تیار کیا تھا۔ تاخیری ڈیفرنشیل مساوات میں سب سے ممتاز مساوات پینٹوگراف مساوات ہے اور یہ بہت سے محققین کی دلچسپی رہی ہے

[19, 35, 36]۔ پینٹوگراف کی ڈیفرنشیل مساوات کا سامنا آبادی کے متحرک ماڈل، کوانٹم تھیوری، کنٹرول تھیوری، سیل گروتھ ماڈل، بیماری کے پھیلاؤ کے ماڈل اور فلکی طبیعیات [35] کے مطالعے میں ہوتا ہے۔ ان مساواتوں میں کئی صنعتی اطلاقات بھی ہیں اور ٹرین کے اوور ہیڈ کرنٹ کلیکشن سسٹم [79] کی ریاضیاتی ماڈلنگ میں مرکزی کردار ادا کرتے ہیں۔ کیٹنری اور ٹرین کی موٹر کے درمیان بجلی کی مسلسل فراہمی کو ایک ڈیوائس کے ذریعے برقرار رکھا جاتا ہے جسے z ۔ شکل پینٹوگراف کہتے ہیں۔ z ۔ شکل پینٹوگراف (جسے ہاف پینٹوگراف بھی کہا جاتا ہے) کاپی کرنے، لکھنے اور ڈرائنگ کے لیے پینٹوگراف ڈیوائس سے مشابہت رکھتا ہے۔ ٹرین چلانے کے لیے درکار بجلی کو کھینچنے کے لیے اس میں رابطے کے آلہ کو تار کے خلاف دھکیلنے کا طریقہ کار ہے۔

ان میں سے زیادہ تر مساوات بالکل حل نہیں ہو سکتیں۔ لہذا، ان کے تقریبی حل حاصل کرنے کے لیے ایک عددی تکنیک کی ضرورت ہے۔ variational iteration طریقہ [25]، One leg- θ طریقہ

[106]، Two-stage R-K طریقہ [108]، Reproducing kernel Hilbert space طریقہ

(RKHSM) [64]، ڈیفرنشل ٹرانسفارم طریقہ [53]، Adomain decomposition طریقہ [20]، Perturbed

iteration طریقہ [10] اس قسم کی ڈیفرنشل مساوات کو حل کرنے کے لیے پہلے سے قائم کردہ عددی تکنیکیں

ہیں۔ حال ہی میں، [8] میں وقت کے متغیر اور وقت کے مختلف ہونے والے پہلے ترتیب میں تاخیر کی ڈیفرنشل مساواتوں کو ہارویولٹ کو لوکیشن طریقہ استعمال کرتے ہوئے حل کیا گیا ہے۔

کچھ دوسرے کو لوکیشن کے طریقے Bernoulli, Hermite Polynomials, Chebyshev Polynomials

Polynomials کا استعمال کرتے ہوئے تیار کیے گئے ہیں تفصیل کے لیے ریڈر بالترتیب [63, 103, 113]

دیکھ سکتے ہیں۔

Chen اور Hsiao [24] نے ڈیفرنشل مساوات کو حل کرنے کے لیے اینٹیگریشن کے ہار آپریشنل میٹرکس

کو استعمال کرنے کا خیال دیا۔ موجودہ لٹریچر میں، ہارویولٹ کو لوکیشن میتھڈ (HWCM) کی نشوونما اور اس کا استعمال ڈیفرنشل مساوات کو حل کرنے کے لیے Chen اور Hsiao کے دیے گئے طریقہ پر مبنی ہے۔

بعد میں اس خیال کو وسیع پیمانے پر مسائل کے حل کے لیے بڑھایا گیا ہے [60]۔ مرزبان اور رزاعی

[71] نے غیر خطی بہترین کنٹرول کے مسئلے کو حل کرنے کے لیے ہارویولٹ کے منطقی انداز کو اپنایا۔ ہار

ویولٹ کو لوکیشن کا طریقہ ساختی میکانکس میں بھی ایک قیمتی ٹول ہے، ہری ہرن [46] نے ہارویولٹ پر

بنی تکنیک کو محدود لمبائی بیم کی مساوات کو حل کرنے کے لیے استعمال کیا۔ Lepik [60] نے ہارویولٹ

طریقہ کا استعمال کرتے ہوئے لچکدار شہتیروں کے بکلنگ پر تبادلہ خیال کیا۔ [84] میں پاترا اور ساہانے ہار

ویولٹ پر مبنی ویولٹ آپریشنل طریقہ کا استعمال کرتے ہوئے سخت نقطہ حرکیات کی مساوات کا حل

حاصل کیا۔ حال ہی میں، تاخیر کی ڈیفرنشل مساوات کو حل کرنے کے لیے Chen-Hsiao تکنیک کو بڑھایا

گیا ہے، عزیز اور امین [8] نے تاخیر کے فرق کے ساتھ ساتھ جزوی تاخیر کی ڈیفرنشل مساوات کے تقریبی

حل کی چھان بین کی۔ رضا وغیرہ۔ [89] ٹیلر سیریز کی توسیع کا استعمال کرتے ہوئے تاخیر کی اصطلاح کو تبدیل کیا اور پھر Haar wavelet collocation طریقہ کو singularly perturbed ڈیفرنشیل فرق مساوات اور singularly perturbed convection delayed dominated diffusion equations کو حل کرنے کے لیے لاگو کیا۔ عبداللہ اور رفیق [2] نے چن-لی-لیو مساوات کا تقریبی حل حاصل کرنے کے لیے backward Euler طریقہ اور ہار ویولٹ کو لوکیشن طریقہ کو ملایا۔

یہاں ہم نے ہار ویولٹ کے روایتی طریقے کے بجائے ترمیم شدہ ہار ویولٹ سیریز کا طریقہ (MHWSM) لاگو کیا ہے۔ اس ترمیم شدہ نقطہ نظر میں، امتیازی مساوات میں موجود اعلیٰ ترین مشتق (n^{th}) فنکشن کی بجائے نامعلوم فنکشن کے $(n+1)^{th}$ مشتق کو ہار ویولٹ سیریز میں نامعلوم ضریب کے ساتھ تقریب دی جاتی ہے۔ MHWSM نے ہار ویولٹ کو لوکیشن طریقہ کے مقابلے میں ایک ہموار حل تیار کیا ہے، اس لیے مطلق غلطی میں نمایاں کمی متوقع ہے۔

5.2 طریقہ کی تعمیر

آئیے ہم ایک n^{th} ترتیب سینٹوگراف مساوات فرض کرتے ہیں۔

$$y^n(t) = \varphi(g(t), y(q_0t), y^1(q_1t), y^2(q_2t) \dots y^n(q_nt)), \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (5.1)$$

$$\text{with } y^n(t_0) = y_0^n,$$

جہاں φ ایک ڈیفرنشیل پزیر فنکشن ہے، $g(t)$ پر $[t_0, t_f]$ مسلسل ہے، اور q_0, q_1, \dots, q_n حقیقی مستقل ہیں $(0, 1]$ میں۔ نیز، $y^1, y^2 \dots y^n$ بالترتیب پہلے، دوسرے اور n^{th} ترتیب مشتقات کو ظاہر کرتا ہے اور y_0^n ابتدائی قدر کی شرائط ہیں $1, 2 \dots n - 1$ کے لیے (5.1) میں $t = t_0$ رکھیں۔ (1.5) کو حل کرنے کے لیے ہم نے Haar wavelet series (2.5) کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل الگورتھم قائم

کیا ہے۔ آئیے فرض کریں $y^{n+1}(t)$ مربع انٹیگریشن فنکشن ہے۔ لہذا، ہم لکھ سکتے ہیں

$$y^{n+1}(t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(t). \quad (5.2)$$

t کے حوالے سے (5.2) کو r بار انٹیگریشن کرتے ہوئے، ہمارا درج ذیل عبارت ملتی ہے

$$y^{n+1-r}(t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i I_r h_i(t) + \sum_{\eta=n+1-r}^n \frac{y^\eta(t_0)(t)^{\eta-(n+1-r)}}{(\eta - (n+1-r))!}. \quad (5.3)$$

(5.3) میں $r = n+1$ رکھنے پر ہمیں $y(t)$ ملتا ہے،

$$y(t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i I_{n+1} h_i(t) + \sum_{\eta=0}^n \frac{y^\eta(t_0)(t)^\eta}{(\eta)!}. \quad (5.4)$$

اس کے علاوہ،

$$y(q_0 t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i I_{n+1} h_i(q_0 t) + \sum_{\eta=0}^n \frac{y^\eta(t_0)(q_0 t)^\eta}{(\eta)!}. \quad (5.5)$$

اسی طرح،

$$y^1(q_1 t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i I_n h_i(q_1 t) + \sum_{\eta=1}^n \frac{y^\eta(t_0)(q_1 t)^{\eta-1}}{(\eta-1)!}, \quad (5.6)$$

⋮

$$y^n(q_n t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i I_1 h_i(q_n t) + y^n(t_0). \quad (5.7)$$

اب، مساوات (5.7- 5.3) کو مساوات (5.1) میں بدلتے ہوئے، ہمیں ملتا ہے۔

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i I_1 h_i(t) + y^n(t_0) = \varphi \left(g(t), \sum_{i=1}^{2M} a_i I_{n+1} h_i(q_0 t) + \sum_{\eta=0}^n \frac{y^\eta(t_0)(q_0 t)^\eta}{(\eta)!}, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^{2M} a_i I_n h_i(q_1 t) + \sum_{\eta=1}^n \frac{y^\eta(0)(q_1 t)^{\eta-1}}{(\eta-1)!}, \dots, \sum_{i=1}^{2M} a_i I_1 h_i(q_n t) + y^n(0) \right). \quad (5.8)$$

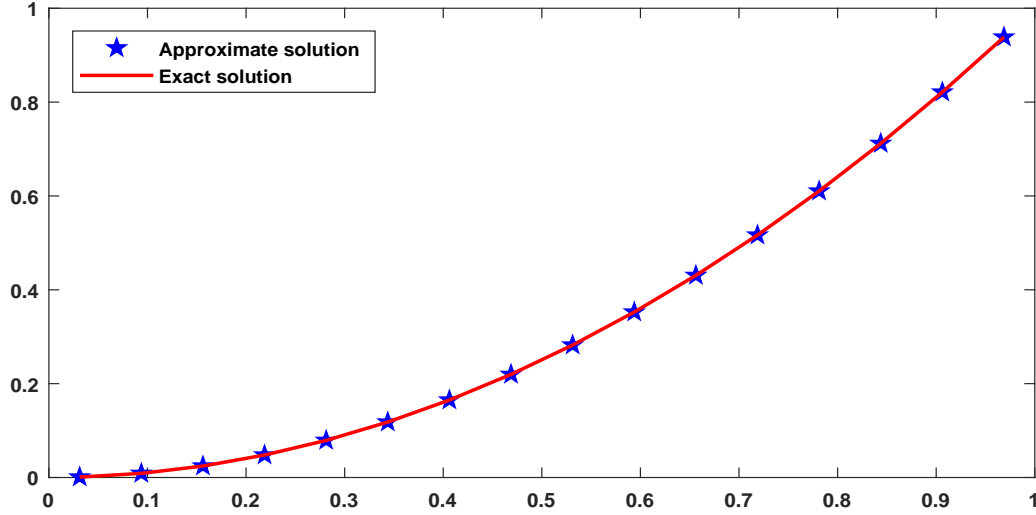
مزید یہ کہ، $t_l = \frac{l-0.5}{2M}$, $l = 1, 2, \dots, 2M$ collocation points (5.8) میں استعمال کرتے ہوئے، ہمیں حاصل ہوا ہے۔

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i I_1 h_i(t_l) + y^n(t_0) = \varphi \left[g(t_l), \sum_{i=1}^{2M} a_i I_{n+1} h_i(q_0 t_l) + \sum_{\eta=0}^n \frac{y^\eta(t_0)(q_0 t_l)^\eta}{(\eta)!}, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^{2M} a_i I_n h_i(q_1 t_l) + \sum_{\eta=1}^n \frac{y^\eta(t_0)(q_1 t_l)^{\eta-1}}{(\eta-1)!}, \dots, \sum_{i=1}^{2M} a_i I_1 h_i(q_n) + y^n(t_0) \right]. \quad (5.9)$$

اب، ہم نیوٹن کا طریقہ یا براہینڈن کا طریقہ جیسی کسی بھی تکراری تکنیک کا استعمال کرتے ہوئے آسانی سے ضریب a_i s تلاش کر سکتے ہیں۔ آخر میں، حل a_i s کو (5.4) میں بدل کر حاصل کیا جاتا ہے۔

5.3 عددی تجربہ

اپنی تکنیک کے قابل اطلاق اور افادیت کو جانچنے کے لیے ہم نے سینٹوگراف نوعیت کی خطی اور غیر خطی ڈیفرنشیل مساوات، اینگروڈیفرنشیل مساوات، دوسرے، تیسری، اور چوتھی ترتیب کی ڈیفرنشیل مساوات کو حل کیا ہے۔ تمام کمپیوٹر سمولیشنز MATLAB میں کیے جاتے ہیں اور ٹیبلز اور تصاویر میں رپورٹ کیے ہیں۔



تصویر 5.1: درست اور تقریبی حل کا موازنہ (مسئلہ 1)۔

ٹیبل 5.1: موجودہ طریقہ کے ساتھ موازنہ میں خرابی (مسئلہ 1)۔

RKHSM[64] $n = 100$	VIM[25] $n = 5$	VIM[25] $n = 5$	One-leg [106, 107] θ -method ($\theta = 0.8$)	Two-stage order-one RKM[108]	Our method $J = 2$
$4.92E - 04$	$5.55E - 03$	$1.11E - 02$	$2.81E - 01$	$5.34E - 03$	0

مسئلہ 1۔ سینٹوگراف کی مساوات پر غور کریں۔

$$y''(t) = \frac{3}{4}y(t) + y\left(\frac{t}{2}\right) + y'\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}y''\left(\frac{t}{2}\right) - t^2 - t + 1, \quad t \in [0, 1], \quad (5.10)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

(5.10) کا درست حل [64] سے $y_e = t^2$ ہے۔ موجودہ تکنیک کو کامیابی کے ساتھ (5.10) پر لاگو کیا گیا ہے اور نتیجہ کا موازنہ کچھ موجودہ طریقوں [108, 106, 107, 25, 64] سے کیا گیا ہے۔ ویولٹ ضریب کا حساب کلاسیکی نیوٹن کے طریقہ کار کو استعمال کرتے ہوئے مناسب ابتدائی اندازے کا انتخاب کر کے کیا جاتا ہے۔ ہم نے مشاہدہ کیا کہ $J = 2, 3, 4, \dots, 9$ کے لیے عظیم مطلق غلطی صفر ہے۔ اس کے علاوہ، یہ ٹیبل 5.1 اور ٹیبل 5.2 سے واضح ہے کہ ہمارے طریقہ کار نے بہتر نتائج پیدا کیے ہیں۔ شکل 5.1 سے پتہ چلتا ہے کہ درست اور تقریبی دونوں حل بصری طور پر ملتے ہیں۔

ٹیبل 5.2: درست اور تقریبی حل کا موازنہ (مسئلہ 1)۔

درست حل	موجودہ طریقہ	$t(= 1/32)$
00097656250.0	00097656250.0	0.1
00878906250.0	00878906250.0	0.3
02441406250.0	02441406250.0	0.5
04785156250.0	04785156250.0	0.7
07910156250.0	07910156250.0	0.9
11816406250.0	11816406250.0	0.11
16503906250.0	16503906250.0	0.13
21972656250.0	21972656250.0	0.15
28222656250.0	28222656250.0	0.17
35253906250.0	35253906250.0	0.19
43066406250.0	43066406250.0	0.21
51660156250.0	51660156250.0	0.23
61035156250.0	61035156250.0	0.25
71191406250.0	71191406250.0	0.27
82128906250.0	82128906250.0	0.29
93847656250.0	93847656250.0	0.31

ٹیبل 5.4: J کی مختلف سطحوں پر عظیم مطلق غلطی (مسئلہ 4)۔

ٹیبل 5.3: J کی مختلف سطحوں پر عظیم مطلق غلطی (مسئلہ 2)۔

$ y_{exact} - y_{approx} \max$	J	$ y_{exact} - y_{approx} \max$	J
$8.2836E - 04$	0.3	$7.4217E - 04$	0.3
$2.1882E - 04$	0.4	$1.9187E - 04$	0.4
$5.6115E - 05$	0.5	$4.8675E - 05$	0.5
$1.4201E - 05$	0.6	$1.2252E - 05$	0.6
$3.5715E - 06$	0.7	$3.0729E - 06$	0.7
$8.9555E - 07$	0.8	$7.6943E - 07$	0.8
$2.2414E - 07$	0.9	$1.9248E - 07$	0.9

مسئلہ 2۔ اس مثال میں ہم ایک دوسرے ترتیب کی غیر خطی پینٹوگراف مساوات پر غور کرتے ہیں۔

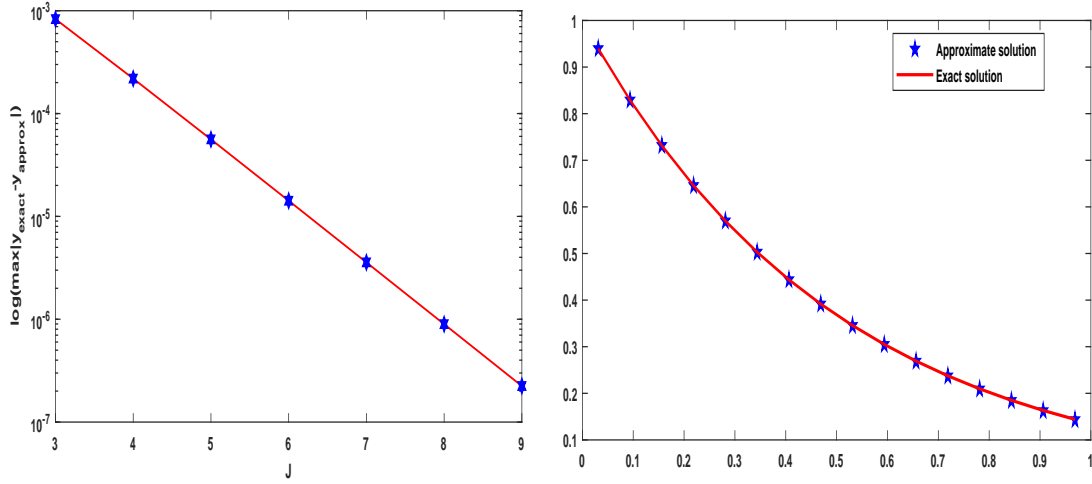
$$y''(t) = -y(t) + 5 \left(y \left(\frac{t}{2} \right) \right)^2, \quad t \in [0, 1], \quad (5.11)$$

$$y(0) = 1, y'(0) = -2.$$

موجودہ الگورتھم کے ساتھ (5.11) کا تقریبی حل حاصل کیا گیا ہے۔ ہمارے حل کا ٹیبل 5.3 اور تصویر

5.2 میں درست حل $y_e = \exp(-2t)$ سے موازنہ کیا ہے۔ ہم نے مشاہدہ کیا ہے کہ عظیم مطلق خامیاں

$J = 2$ کے لیے $O(10^{-3})$ سے $J = 9$ کے لیے $O(10^{-7})$ تک کم ہوتی ہیں۔



تصویر 5.3: عظیم مطلق غلطیاں
بمقابلہ J (مسئلہ 2)۔

تصویر 5.2: درست اور تقریبی حل
کا موازنہ (مسئلہ 2)۔

مسئلہ 3۔ آئیے مندرجہ ذیل دوسرے ترتیب پینٹوگراف کی قسم کی ابتدائی قدر کے مسئلے پر غور کریں جو

[64] میں ذکر کیا گیا ہے،

$$y''(t) = y' \left(\frac{t}{2} \right) - \frac{t}{2} y'' \left(\frac{t}{2} \right) + 2, \quad t \in [0, 1], \quad (5.12)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

ہم نے موجودہ طریقہ کا استعمال کرتے ہوئے اس مثال کو حل کیا ہے۔ مطلوبہ فنکشن

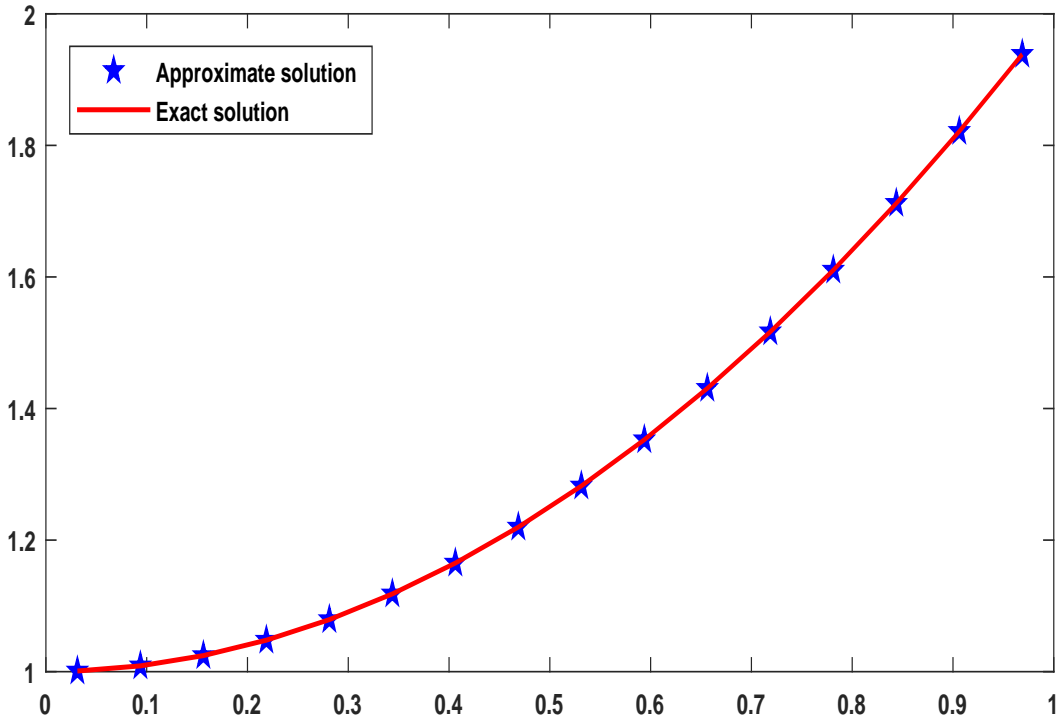
سمولیشن کرنے پر یہ دیکھا گیا ہے کہ $J = 2, 3, \dots, 9$ کے لیے عظیم مطلق غلطی صفر ہے۔ تقریبی حل اور

درست حل کے درمیان موازنہ کو جدول 5.5 اور تصویر 5.4 میں دکھایا گیا ہے جو ظاہر کرتا ہے کہ دونوں حل

ایک جیسے ہیں۔

ٹیبل 5.5: درست اور تقریبی حل کا موازنہ (مسئلہ 3)۔

درست حل	موجودہ طریقہ	$t(= 1/16)$
003906250.1	003906250.1	0.1
035156250.1	035156250.1	0.3
097656250.1	097656250.1	0.5
191406250.1	191406250.1	0.7
316406250.1	316406250.1	0.9
472656250.1	472656250.1	0.11
660156250.1	660156250.1	0.13
878906250.1	878906250.1	0.15



تصویر 5.4: تقریبی اور درست حل کا موازنہ (مسئلہ 3)۔

مسئلہ 4۔ ہم مناسب تاخیر والی ایک غیر خطی اینٹیگرو ڈیفریئنشل مساوات پر غور کرتے ہیں۔

$$y'(t) + \left(\frac{t}{2} - 2\right) y(t) - 2 \int_0^t \left(y\left(\frac{s}{2}\right)\right)^2 ds = 1, \quad t \in [0, 1], \quad (5.13)$$

$$y(0) = 0.$$

مساوات (5.13) کو دوسری ترتیب کی غیر خطی سینٹوگراف مساوات تک کم کیا جاسکتا ہے

$$y''(t) + \left(\frac{t}{2} - 2\right) y'(t) + \frac{1}{2} y(t) - 2 \left(y\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 = 1, \quad t \in [0, 1], \quad (5.14)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

اب، ہم نے موجودہ الگورتھم کو (5.14) پر لاگو کیا ہے اور اس کا تقریبی حل حاصل کیا ہے۔ حل کا موازنہ درست حل $y_e = t \exp(t)$ سے کیا گیا ہے اور نتائج کو جدول 5.4 اور جدول 5.6 میں پیش کیے گئے ہیں۔ ہم نے مشاہدہ کیا ہے کہ عظیم مطلق خامیاں $J = 2$ کے لیے $O(10^{-4})$ سے $J = 9$ کے لیے $O(10^{-7})$ تک کم ہوتی ہیں۔ اس کے علاوہ، ہم نے تصویر 5.5 میں تصدیق کی ہے کہ دونوں حل بصری طور پر ایک جیسے ہیں۔

مسئلہ 5۔ اس مثال میں ہم تیسری ترتیب سینٹوگراف مساوات پر غور کرتے ہیں۔

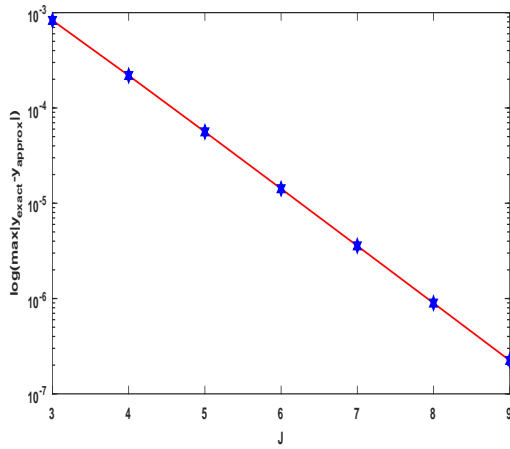
$$y'''(t) = y(t) + y'\left(\frac{t}{2}\right) + y''\left(\frac{t}{3}\right) + \frac{1}{2} y'''\left(\frac{t}{4}\right) - t^4 - \frac{t^3}{2} - \frac{4}{3} t^2 + 21t, \quad t \in [0, 1],$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \quad (5.15)$$

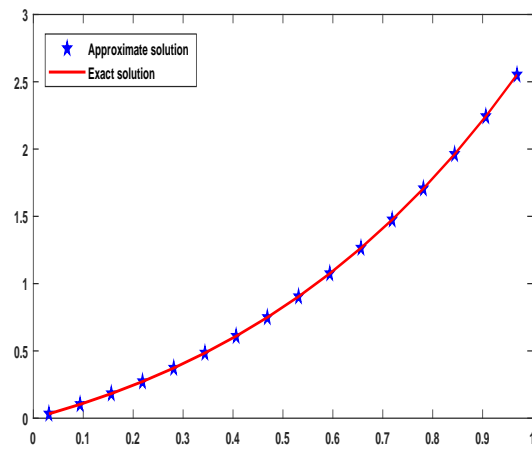
ہم نے موجودہ الگورتھم کو (5.15) پر لاگو کیا ہے۔ تقریبی اور درست حل $y_e = t^4$ کے درمیان موازنہ تصویر 5.7 میں دکھایا گیا ہے اور یہ ظاہر کرتا ہے کہ دونوں حل بصری طور پر ایک جیسے ہیں۔ ویولٹ سیریز

ٹیبل 5.6: درست اور تقریبی حل کا موازنہ (مسئلہ 4)۔

$ y_{exact} - y_{approx} $	درست حل	موجودہ طریقہ	$t (= 1/32)$
$0.1653E - 6$	0322419814.0	0322421468.0	0.1
$0.2423E - 5$	1029642319.0	1029618079.0	0.3
$0.8562E - 5$	1826747572.0	1826661951.0	0.5
$0.1856E - 4$	2722387735.0	2722202080.0	0.7
$0.3348E - 4$	3725957133.0	3725622277.0	0.9
$0.5385E - 4$	4847651995.0	4847113430.0	0.11
$0.8086E - 4$	6098534812.0	6097726143.0	0.13
$0.1152E - 3$	7490603671.0	7489450753.0	0.15
$0.1585E - 3$	9036866916.0	9035281845.0	0.17
$0.2115E - 3$	0751423553.1	0749307939.1	0.19
$0.2760E - 3$	2649549829.1	2646789302.1	0.21
$0.3533E - 3$	4747792434.1	4744259044.1	0.23
$0.4453E - 3$	7064068834.1	7059615777.1	0.25
$0.5536E - 3$	9617775258.1	9612238562.1	0.27
$0.6806E - 3$	2429902915.2	2423096473.2	0.29
$0.8283E - 3$	5523163047.2	5514879480.2	0.31



تصویر 5.6: عظیم مطلق غلطیاں بمقابلہ J (مسئلہ 4)۔



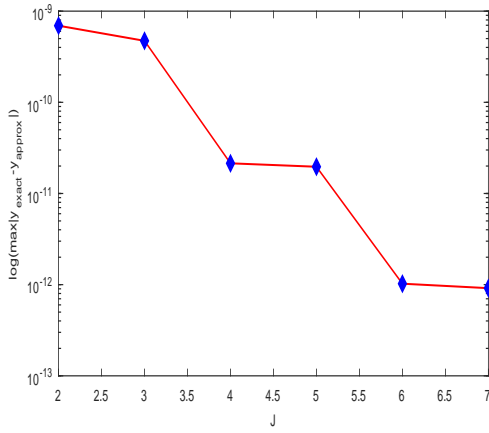
تصویر 5.5: درست اور تقریبی حل کا موازنہ (مسئلہ 4)۔

ٹیبل 5.7: موجودہ طریقہ کار کے ساتھ خرابی کا موازنہ (مسئلہ 5)۔

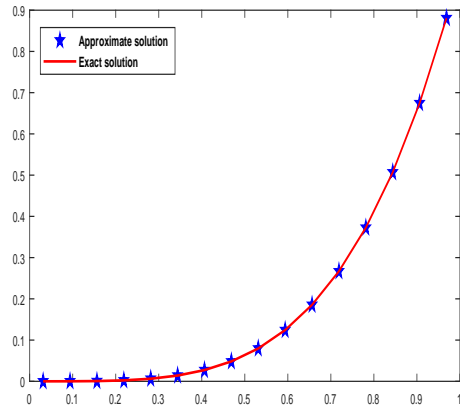
VIM [25] $n = 6$	VIM [25] $n = 5$	VIM [25] $n = 4$	Two-stage [108] order-one RKM	ہمارا طریقہ $J = 2$
$1.26E - 06$	$4.01E - 05$	$3.21E - 04$	$7.34E - 02$	$6.92214E - 10$

ٹیبل 5.8: درست اور تقریبی حل کا موازنہ (مسئلہ 5)۔

$ y_{exact} - y_{approx} $	درست حل	موجودہ طریقہ	$t(= \frac{1}{16})$
$0.00098E - 10$	000015258789063.0	000015258789160.0	0.1
$0.07143E - 10$	001235961914063.0	001235961921205.0	0.3
$0.02372E - 10$	009536743164063.0	009536743166434.0	0.5
$0.21057E - 10$	036636352539063.0	036636352518005.0	0.7
$1.26421E - 10$	100112915039063.0	100112915165484.0	0.9
$1.31123E - 10$	223403930664063.0	223403930795185.0	0.11
$2.14829E - 10$	435806274414063.0	435806274199234.0	0.13
$6.92214E - 10$	772476196289063.0	772476195596849.0	0.15



تصویر 5.8: عظیم مطلق غلطیاں کا موازنہ J (مسئلہ 5)۔



تصویر 5.7: درست اور تقریبی حل کا موازنہ (مسئلہ 5)۔

کا حساب کلاسیکی نیوٹن کے طریقہ کار سے مناسب ابتدائی اندازے کے ساتھ کیا جاتا ہے۔ نیز، ہم نے مشاہدہ کیا کہ $J = 2$ کے لیے عظیم مطلق غلطی 10^{-10} کی ہے۔ جدولوں 5.9، 5.8 اور 5.7 سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ موجودہ طریقہ زیادہ موثر ہے اور بہت بہتر نتیجہ پیدا کرتا ہے۔

مسئلہ 6۔ اب ہم چوتھے ترتیب کی غیر خطی ملٹی پینٹوگراف مساوات پر غور کرتے ہیں۔

$$y^{iv}(t) = y''\left(\frac{t}{2}\right) \left(y^{iv}\left(\frac{t}{4}\right) - y(t)\right) + \lambda(t), \quad t \in [0, 1], \quad (5.16)$$

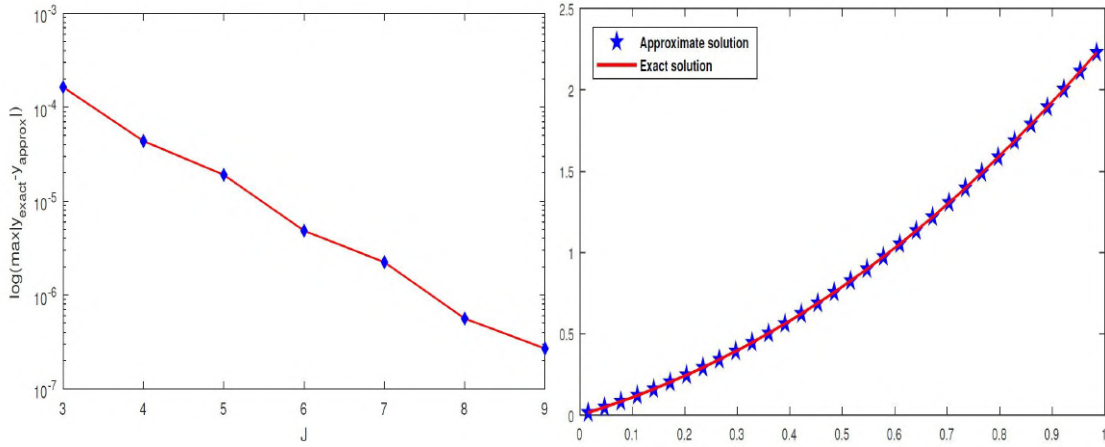
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 2,$$

جہاں $\lambda(t)$ کو اس طرح لیا گیا ہے کہ سسٹم کے پاس درست حل $y_e = e^{(t)} \sin(t)$ ہو۔ سیکشن 3 میں

ٹیبل 5.10: J کی مختلف سطحوں پر عظیم مطلق غلطی (مسئلہ 6)۔

ٹیبل 5.9: J کی مختلف سطحوں پر عظیم مطلق غلطی (مسئلہ 5)۔

$ y_{exact} - y_{approx} \max$	J	$ y_{exact} - y_{approx} \max$	J
$4.3588E - 05$	0.4	$6.9221E - 10$	0.2
$1.9020E - 05$	0.5	$4.7252E - 10$	0.3
$4.8286E - 06$	0.6	$2.1423E - 11$	0.4
$2.2318E - 06$	0.7	$1.9649E - 11$	0.5
$5.5998E - 07$	0.8	$1.0246E - 12$	0.6
$2.6855E - 07$	0.9	$9.1538E - 13$	0.7



تصویر 5.10: عظیم مطلق غلطیاں بمقابلہ J (مسئلہ 6)۔

تصویر 5.9: درست اور تقریبی حل کا موازنہ (مسئلہ 6)۔

عددی تکنیک کا ذکر کرتے ہوئے ہم نے J کی مختلف اقدار کے لیے (5.16) کا تقریبی حل حاصل کیا ہے۔ عظیم مطلق غلطیوں کا حساب مختلف ریزولوشن 5.10 پر کیا ہے۔ مزید برآں، درست حل اور تقریبی حل کو $J = 4$ کے لیے تصویر 5.9 میں پلاٹ کیا گیا ہے۔ حاصل کردہ نتائج کی بنیاد پر، یہ احساس ہوتا ہے کہ اس طرح کے مسائل سے نمٹنے کے لیے یہ طریقہ کار آمد ہے۔

5.4 خلاصہ

اس باب نے روایتی ہارویولٹ سیریز کے طریقہ کار میں ترمیم کی، اور دوسری اور اعلیٰ ترتیب والی پینٹوگراف مساوات کے حل حاصل کرنے کے لیے اس طریقہ کو استعمال کیا۔ الیکٹروڈائنامکس میں پینٹوگراف مساوات کے اطلاق کا ایک مختصر اکاؤنٹ بھی پیش کیا گیا۔ اس طریقہ کو عددی تقالی میں جانچا گیا اور دوسرے طریقوں سے موازنہ کیا گیا ہے۔

باب 6

فریکشنل آرڈر متناسب تاخیر ریکالٹی ڈیفرینشل مساوات کو حل کرنے کے لیے ایک کوو کیشن طریقہ

6.1 تعارف

پچھلے چند سالوں میں، فریکشنل کیلکولس کے موضوع نے کئی فریکشنل نظاموں کے طرز عمل کو بیان کرنے کے لیے مزید عمومی طریقے فراہم کیے ہیں۔ فریکشنل آرڈر ماڈلز نے محققین کی توجہ مبذول کرائی ہے کیونکہ غیر عددی مشتق والی ڈیفرینشل مساوات بہت سے نظاموں کی حرکیات کو زیادہ حقیقت پسندانہ طور پر ظاہر کرتی ہے، مثال کے طور پر بائیو انجینئرنگ [65]، viscoelasticity [66]، diffusions [72]، افرا تفری کا نظریہ، فریکشنل کیپسیٹر تھیوری [86]، electromagnetism [114]، electrochemistry [81]، اور بہت سے دوسرے [30, 104]۔ اس کے علاوہ، حالیہ برسوں میں، متعدد مصنفین [32, 55, 85] نے فریکشنل ڈیفرینشل مساوات کے تجزیہ اور اطلاق پر ایک بڑا لٹریچر دیا ہے، مزید برآں، کئی مصنفین نے فریکشنل ڈیریویٹیو کی مختلف تعریفیں تجویز کیں۔ Riemann-Liouville اور Liouville-Caputo ایک فریکشنل ڈیریویٹیو کی وضاحت کرتے ہیں جو فریکشنل کیلکولس کے میدان میں اہم اہمیت کا حامل ہے لیکن سنگولر لوکل پاور کرنل کی وجہ سے اس کی کچھ حدود ہیں۔ Caputo اور Fabrizio ایکسپونینشل ڈیکری کرنل [22] کا استعمال کرتے ہوئے فریکشنل ڈیریویٹیو کی ایک نئی تعریف تجویز کرتے ہیں۔ حال ہی میں، Atangana اور Baleanu نے ایک اور فریکشنل مشتق تجویز کیا جو ML فنکشن [7] کے تصور پر مبنی ہے۔ مزید برآں، کچھ مصنفین نے مزید دلچسپ تعریفیں تجویز کیں جہاں وقت پر منحصر غیر مستقل آرڈر فریکشنل ڈیریویٹیو اور

اننگرل $\alpha(t)$ شامل ہے [95]۔

Delay ڈیفریئنشل مساوات (DDEs) ڈیفریئنشل مساوات کی ایک خاص کلاس تشکیل دیتے ہیں جس میں، حل کی شرح، موجودہ کے ساتھ ساتھ منحصر متغیر کی کچھ سابقہ قدر اور/یا ان کے مشتق پر منحصر ہوتی ہے۔ DDEs بڑے پیمانے پر ڈیفریئنشل، بایوسائنسز، انجینئرنگ، الیکٹروڈائنامکس اور معاشیات پر اسپیس کو ماڈل بنانے کے لیے استعمال ہوتے ہیں۔ تاخیر/وقف τ کی نوعیت پر منحصر DDEs کے مختلف فارمیٹس ہیں جیسے مستقل تاخیر کے ساتھ، DDEs وقت پر منحصر تاخیر کے ساتھ $\tau(t)$ ، DDEs حالت پر منحصر تاخیر کے ساتھ $\tau(t, y)$ ، نیوٹرل DDEs، اور متناسب DDEs یا پینٹوگراف مساوات۔ یہاں ہماری دلچسپی کا موضوع درج ذیل فزیکشنل آرڈر کی proportional delay ریکارڈی ڈیفریئنشل مساوات (PDRDE):

$$\begin{cases} \chi^\alpha(t) = \Omega(t) + c_1(t)\chi(t) + c_2(t)\chi(qt)(c_3(t) - \chi(qt)) \\ \text{with } \chi(0) = \chi_0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 < \alpha < 1, \end{cases} \quad (6.1)$$

جہاں Ω, c_1, c_2, c_3 تجزیاتی افعال ہیں، اور $q \in (0, 1)$ ۔ نوٹ کریں کہ جب $q = 1$ ، مساوات (1.6) عام Riccati فزیکشنل ڈیفریئنشل مساوات بن جاتی ہے۔

فزیکشنل ڈیریویٹیو اور تاخیری اصطلاحات کی شمولیت کی وجہ سے، ان مساواتوں کی کمپیوٹیشنل پیچیدگیاں بڑھ جاتی ہیں، اس طرح ان مساواتوں کو تجزیاتی طور پر حل کرنا بہت پیچیدہ ہو جاتا ہے۔ نیز، بعض صورتوں میں ان مساواتوں کا تجزیاتی حل موجود نہیں ہے، اس لیے تقریب حل تلاش کرنے کے لیے ایک موثر عددی تکنیک ضروری ہے۔

حالیہ برسوں میں، بہت سے مصنفین نے delay ڈیفریئنشل مساوات کو حل کرنے میں دلچسپی ظاہر کی ہے ان میں سے کچھ مندرجہ ذیل ہیں۔ [116] میں Yuzbasi اور Sezer نے پینٹوگراف مساوات، کو حل کرنے کے لیے exponential polynomial اور collocation point پر مبنی تقریب کا طریقہ متعارف کرایا ہے۔ [11] Cevik نے proportional DDEs کو عددی طور پر perturbation-iteration طریقہ کا استعمال

کرتے ہوئے حل کیا، Davaeifar اور Rashidinia [29] نے ملٹی پینٹوگراف مساوات کو حل کرنے کے لیے first Boubaker polynomials method کا طریقہ تجویز کیا ہے۔ مزید، Sakar [94] وغیرہ۔ ریکارڈی ڈیفریئنشل مساوات کو حل کرنے کے لیے اٹریٹور پیروڈوسنگ کرنل کا طریقہ استعمال کیا، متھوکار اور گنیش [77] نے فریکشنل تاخیر کی ڈیفریئنشل مساوات کو حل کرنے کے لیے عددی تکنیک تیار کرنے کے لیے شفٹڈ جیکوبی پولینومیل کا استعمال کیا، Li اور Wang [62] DDEs کے حل کی نمائندگی کرتے ہیں۔ Riemann-Liouville قسم کو Mittag-Leffler فنکشن، کا استعمال کرتے ہوئے Ali وغیرہ۔ [6] نے فریکشنل آرڈر DDEs کو حل کرنے کے لیے اسپیکٹرل کو لوکیشن کا طریقہ استعمال کیا، Ghomanjani & Shateyi [41] نے quadratic Riccati DEs، multipantograph DDEs، اور پینٹوگراف میں تاخیر کے ساتھ بہترین کنٹرول سسٹمز کو حل کرنے کے لیے Genocchi polynomial کا استعمال کرتے ہوئے ایک تقریبی اسکیم تیار کی، جعفری وغیرہ۔ [51] پینٹوگراف DDEs کو حل کرنے کے لیے منتقل کردہ Legen-Bessels polynomials dre pseudospectral طریقہ فراہم کرتا ہے، Izadi & Srivastava [50] نے Lane-Emeden pantograph dde کا ایک عددی Collocation point کا استعمال کرتے ہوئے اور Lane-Emeden pantograph dde کا ایک عددی حل تیار کیا، پننگھل & کمار [83] نے ملٹی پینٹوگراف ٹائپ DDEs کو حل کرنے کے لیے نیورل نیٹ ورک تکنیک کا استعمال کیا۔

ہار ویولٹ کمپیکٹ سپورٹ، باکس فنکشن ہے جس میں صرف تین ویلیوز $\{0, \pm 1\}$ لیتی ہیں۔ پچھلی دو دہائیوں سے، اس کا استعمال مختلف قسم کی ڈیفریئنشل مساوات کو حل کرنے کے لیے کیا جا رہا ہے۔ ہار ویولٹ کی تفصیلی اپیلی کیشنز مونوگراف میں اور حوالہ جات [60, 87] میں دیکھی جا سکتی ہیں۔ [97] میں شاہ وغیرہ۔ ہار ویولٹ کا استعمال کرتے ہوئے ایک عددی تکنیک تجویز کی۔ حال ہی میں Oruc et al. [82] نے ایک ہار ویولٹ اور محدود فرق پر بنی اسکیم پیش کی تاکہ ایک دو-dimensional وقت فریکشنل reaction-sub-diffusion مساوات کو حل کیا جاسکے، اکمل اور ارشد نے [88] ہار ویولٹ بیزز کا استعمال کرتے ہوئے نیورل DDEs کو حل کیا، عبداللہ اور رفیق [2] نے چن-لی-لیو مساوات کا تقریبی حل حاصل

کرنے کے لیے آنلریکوریٹو طریقہ اور ہارویولٹ کولوکیشن طریقہ کو ملایا۔ مندرجہ بالا لٹریچر سے حوصلہ افزائی کرتے ہوئے، ہمارا مقصد ہارویولٹ سیریز کا طریقہ (HWSM) کا اطلاق کرنا ہے تاکہ کیپوٹو ڈیریویٹیو کے ساتھ فیکشنل آرڈر کی proportional delay ریکالٹی ڈیفریئنشل مساوات کو حل کیا جاسکے۔

فیکشنل کیلکولس سے متعلق کچھ بنیادی تعریفیں،

ایک فنکشن $g(t)$, $t \in (c, d)$ کے آرڈر $\alpha > 0$ کے ریمن-لیوویل انٹیگرل آپریٹر کو اس طرح دکھایا گیا ہے:

$${}_{RL}\mathcal{J}_{c,t}^{\alpha}g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^t (t-u)^{\alpha-1}g(u)du \quad (6.2)$$

جہاں $\Gamma(\cdot)$ یولر کا گاما فنکشن ہے۔

ایک فنکشن $g(t)$, $t \in (c, d)$ کے آرڈر $\alpha > 0$ کا ریمن-لیوویل مشتق اس طرح بیان کیا گیا ہے:

$${}_{RL}\mathcal{D}_{c,t}^{\alpha}g(t) = \frac{1}{\Gamma(\zeta-\alpha)} \frac{d^{\zeta}}{dt^{\zeta}} \int_0^t (t-u)^{\zeta-\alpha-1}g(u)du, \quad (6.3)$$

خاص طور پر، $\zeta - 1 < \alpha < \zeta$, $\zeta \in \mathbb{N}$ کے لیے ہمارے پاس $n = 1$ ہے اور اس لیے،

$${}_{RL}\mathcal{D}_{c,t}^{\alpha}g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_c^t (t-u)^{-\alpha}g(u)du. \quad (6.4)$$

ایک فنکشن $g(t)$, $t \in (c, d)$ کے آرڈر $\alpha > 0$ کے کاپوتو فیکشنل مشتق کی تعریف اس طرح کی گئی ہے:

$${}_c\mathcal{D}_{c,t}^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(\zeta - \alpha)} \int_c^t (t - u)^{\zeta - \alpha - 1} g^{(\zeta)}(u) du, \quad (6.5)$$

خاص طور پر، $0 < \alpha < 1$ کے لیے ہمارے پاس $n = 1$ ہے اور اس لیے،

$${}_c\mathcal{D}_{c,t}^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_c^t (t - u)^{-\alpha} g'(u) du. \quad (6.6)$$

انٹروال $[0, 1]$ پر درج ذیل اینیگرل ہارویولٹ کو لاگو کرنے کے لیے ضروری ہے:

$$\mathcal{P}_i^\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^t (t - u)^\alpha h_i(u) du.$$

(2.5) کے R-L اینیگریشن دیتا ہے

$$\mathcal{P}_i^\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \begin{cases} \phi_1(t), & t \in [\vartheta_1(i), \vartheta_2(i)) \\ \phi_2(t), & t \in [\vartheta_2(i), \vartheta_3(i)) \\ \phi_3(t), & t \in [\vartheta_3(i), 1) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6.7)$$

$$\phi_1(t) = (t - \vartheta_1(i))^\alpha,$$

$$\phi_2(t) = [(t - \vartheta_1(i))^\alpha - 2(t - \vartheta_2(i))^\alpha],$$

$$\phi_3(t) = [(t - \vartheta_1(i))^\alpha - 2(t - \vartheta_2(i))^\alpha + (t - \vartheta_3(i))^\alpha],$$

جہاں

$$i = 2^j + k + 1 \text{ انڈیکس } \vartheta_1(i) = k/2^j, \vartheta_2(i) = (k + 0.5)/2^j, \vartheta_3(i) = (k + 1)/2^j.$$

$$k = 0, 1, \dots, 2^j - 1. \text{ اور } j = 0, 1, \dots, J \text{ جہاں } J \text{ عظیم سطح ہے}$$

6.2 طریقہ کی تفصیل

اس سیکشن میں ہم ہارویولیت سیریز کا طریقہ (HWSM) پیش کرتے ہیں تاکہ فریکشنل آرڈر مساوات (6.1) کا تقریبی حل تلاش کریں۔ اس کے لیے، ہم تقریب لگاتے ہیں۔ $\chi^\alpha(t)$ جو مساوات (6.1) میں موجود ہے کٹی ہوئی ہارویولیت سیریز سے جو ذیل:

$$\chi^\alpha(t) = \sum_{i=1}^{2^{J+1}} a_i h_i(t). \quad (6.8)$$

R-L اینٹیگریشن (6.8) کا 0 سے t دیتا ہے۔

$$\chi(t) = \sum_{i=1}^{2^{J+1}} a_i \mathcal{P}_i^\alpha(t) + \chi(0). \quad (6.9)$$

اب بدل دیں t کو qt سے (6.9) میں ہمیں ملتا ہے۔

$$\chi(qt) = \sum_{i=1}^{2^{J+1}} a_i \mathcal{P}_i^\alpha(qt) + \chi(0). \quad (6.10)$$

مساوات (6.1) میں مساوات (6.8) سے (6.10) کا استعمال کرتے ہوئے ہمیں ملتا ہے،

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2^{J+1}} a_i h_i(t) &= \Omega(t) + c_1(t) \left(\sum_{i=1}^{2^{J+1}} a_i \mathcal{P}_i^\alpha(t) + \chi(0) \right) \\ &+ c_2(t) \left(\sum_{i=1}^{2^{J+1}} a_i \mathcal{P}_i^\alpha(qt) + \chi(0) \right) (c_3(t) \\ &- \left(\sum_{i=1}^{2^{J+1}} a_i \mathcal{P}_i^\alpha(qt) + \chi(0) \right)). \end{aligned} \quad (6.11)$$

سسٹم (6.11) کو منتخب کردہ کو لوکیشن پوائنٹس، $t_l = \frac{(l-0.5)}{2^{J+1}}$ کے ساتھ ڈسکریٹائز کرنے پر ہمیں ملتا ہے،

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2^{J+1}} a_i h_i(t_l) &= \Omega(t_l) + c_1(t_l) \left(\sum_{i=1}^{2^{J+1}} a_i \mathcal{P}_i^\alpha(t_l) + \chi(0) \right) \\ &+ c_2(t_l) \left(\sum_{i=1}^{2^{J+1}} a_i \mathcal{P}_i^\alpha(qt_l) + \chi(0) \right) (c_3(t_l) \\ &- \left(\sum_{i=1}^{2^{J+1}} a_i \mathcal{P}_i^\alpha(qt_l) + \chi(0) \right)). \end{aligned} \quad (6.12)$$

ہارویولٹ کو فیشنٹس a_i s کے لیے مندرجہ بالا سسسٹم کو حل کریں۔ ان کو فیشنٹس کو مساوات (6.9) میں جوڑنے سے تقریبی حل $\chi(t_l)$ پیدا ہوتا ہے۔

6.3 ایپلی کیشنز اور عددی نتائج

تاخیر کی ڈیفریئنشل مساوات کے نظریہ کے ساتھ فریکشنل کیلکولس کے امتزاج نے پچھلے کچھ سالوں کے دوران متعدد حقیقی دنیا کے مظاہر کی ریاضیاتی وضاحت کو بڑھایا ہے۔ دوسری طرف، فریکشنل ڈیفریئنشل کے ماڈلز کو حل کرنے کے لیے کئی عددی تکنیک تیار کیے گئے ہیں۔ تاہم، بہت کم محققین نے تاخیر والی

فریکشنل ڈیفریئنشل مساوات کی اچھی طرح چھان بین کی ہے۔ اس سیکشن میں، ہم ہارویولٹ سیریز کے طریقہ کار (HWSM) کا استعمال کرتے ہوئے کچھ فریکشنل ترتیب تاخیر ڈیفریئنشل مساوات کے عددی حل درج کیے ہیں۔ عددی مثالوں کو حل کرنے سے پہلے، ہم موجودہ لٹریچر سے HWSM کے کچھ حقیقی دنیا کے اطلاقات بیان کریں گے۔ دسمبر 2019 میں ناول کورونا وائرس-2019 نامی ایک خطرناک وباء نے دنیا کو گھٹنوں کے بل لے لیا اور دنیا کے بیشتر حصوں میں روزمرہ کی زندگی کو ٹھپ کر کے رکھ دیا۔ محققین کا دعویٰ ہے کہ یہ وائرس چین کے شہر ووہان سے شروع ہوا تھا۔ علامات کی شناخت، اس کے پھیلاؤ پر قابو پانے، اور تکنیک اور بیماری کے خاتمے کے لیے سیارے پر وسیع تحقیق ابھی بھی زوروں پر ہے۔ ایک کوشش میں کمال شاہ، وغیرہ [98]۔ ناول کورونا وائرس-2019 کی ٹرانسمیشن ڈائنامکس کا مطالعہ کیا اور حساس آبادی، متاثرہ آبادی، اور بازیاب شدہ آبادی سمیت تین حصوں پر غور کر کے ایک فریکشنل آرڈر ڈیفریئنشل ریاضیاتی ماڈل بنائیں۔ مزید، ماڈل کا حل ہارویولٹ کولوکیشن طریقہ استعمال کرتے ہوئے کیا ہے۔ لہذا یہ طریقہ متعدی بیماری کے پھیلاؤ کے ماڈلنگ میں ایک موثر ذریعہ ثابت ہوا ہے۔ کئی حالیہ مطالعات جنہوں نے ہارویولٹ کو ریاضی کے سازگار ٹول کے طور پر فروغ دیا ہے وہ ہیں [102, 73, 57]۔

مسئلہ 1: مندرجہ ذیل فریکشنل آرڈر PDRDE پر غور کریں۔

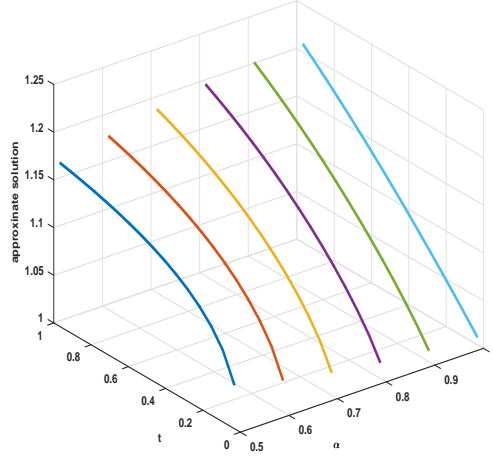
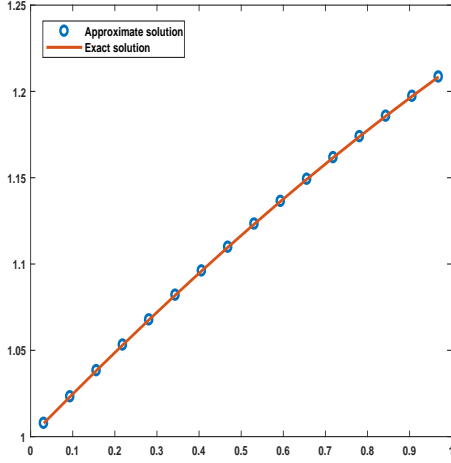
$$y^\alpha(t) = \frac{1}{4}y(t) + y\left(\frac{t}{2}\right)\left(1 - y\left(\frac{t}{2}\right)\right), 0 \leq \alpha \leq 1, t \in (0, 1) \quad (6.13)$$

ابتدائی حالت

$$y(0) = 1,$$

کے ساتھ اور جس کا صحیح حل

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{2}t}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{2}t}{4}\right),$$



تصویر 6.1: مسئلہ 1-

ٹیبل 6.1: تقریبی حل $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9, 1$ پر جب $J = 3$ (مسئلہ 1-)

y_{exact}	$\alpha = 1$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.5$	t_l
0078.1	0078.1	0113.1	0235.1	0455.1	0313.0
0383.1	0383.1	0473.1	0692.1	0933.1	1563.0
0677.1	0677.1	0784.1	1000.1	1173.1	2813.0
0961.1	0960.1	1065.1	1243.1	1335.1	4063.0
1232.1	1232.1	1322.1	1442.1	1456.1	5313.0
1492.1	1492.1	1558.1	1609.1	1551.1	6563.0
1739.1	1739.1	1775.1	1751.1	1627.1	7813.0
1973.1	1972.1	1973.1	1872.1	1689.1	9063.0

ہے۔ جب $\alpha = 1$ ہے۔(6.13) کا تقریبی حل HWSM کا استعمال کرتے ہوئے شمار کیا ہے۔ $\alpha = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$ پر حل کا رویہ تصویر 6.1 میں گرافک طور پر پیش کیا گیا ہے۔ اس کے علاوہ، ہم نے $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9, 1$ پر حل ٹیبل 6.1 میں پیش کیا ہے۔ مختلف J پر عظیم مطلق غلطیوں (MAEs) کو ٹیبل 6.2 میں دکھایا گیا ہے۔

مسئلہ 2: مندرجہ ذیل فزیکشنل آرڈر PDRDE کو حل کریں۔

$$y^\alpha(t) = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{t}{2}\right) y\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} y(t), 0 \leq \alpha \leq 1, t \in (0, 1) \quad (6.14)$$

ٹیبل 6.2: عظیم مطلق غلطی (MAE) $-max|y - y_{exact}|$

مسئلہ 4	مسئلہ 3	مسئلہ 2	مسئلہ 1	J
$2.8315e - 08$	$9.4852E - 06$	$1.8900E - 03$	$3.0351E - 05$	3
$1.1102e - 16$	$2.3778E - 06$	$4.8189E - 04$	$7.6090E - 06$	4
$1.1102e - 16$	$5.9526E - 07$	$1.2167E - 04$	$1.9048E - 06$	5
—	$1.4891E - 07$	$3.0572E - 05$	$4.7652E - 07$	6
—	$3.7240E - 08$	$7.6623E - 06$	$1.1917E - 07$	7
—	$9.3117E - 09$	$1.9178E - 06$	$2.9797E - 08$	8
—	$2.3281E - 09$	$4.7979E - 07$	$7.4499E - 09$	9
—	$5.8205E - 10$	$1.1996E - 07$	$1.8620E - 09$	10

ٹیبل 6.3: تقریباً حل $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9, 1$ (مسئلہ 2)۔

y_{exact}	$\alpha = 1$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.5$	t_l
0317.1	0323.1	0480.1	1065.1	2426.1	0313.0
1691.1	1697.1	2183.1	3661.1	6442.1	1563.0
3248.1	3255.1	3998.1	6148.1	9987.1	2813.0
5012.1	5021.1	6007.1	8796.1	3653.2	4063.0
7011.1	7021.1	8255.1	1698.2	7606.2	5313.0
9276.1	9288.1	0782.2	4919.2	1951.3	6563.0
1842.2	1857.2	3632.2	8520.2	6775.3	7813.0
4750.2	4768.2	6849.2	2561.3	2165.4	9063.0

ابتدائی حالت

$$y(0) = 1,$$

کے ساتھ اور جس کا صحیح حل

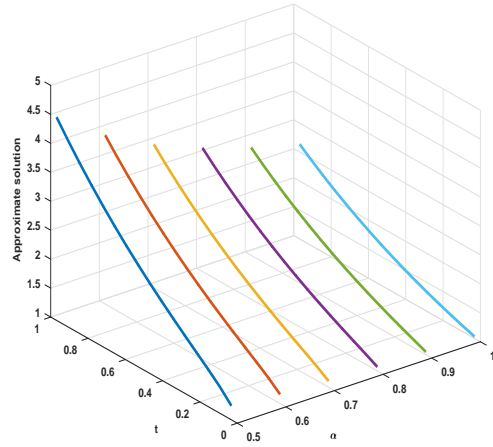
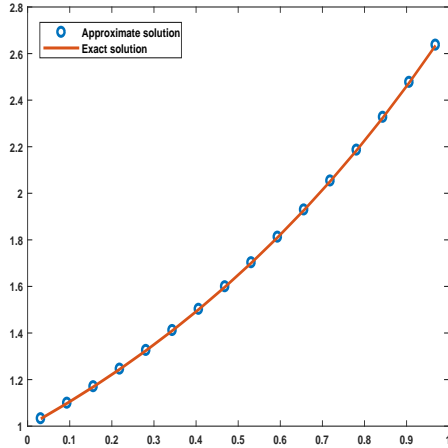
$$y(t) = \exp(t),$$

ہے۔ جب $\alpha = 1$ ہے۔

(6.14) کا تقریبی حل HWSM کا استعمال کرتے ہوئے شمار کیا ہے۔ $\alpha = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$

پر حل کا رویہ تصویر 6.2 میں گرافک طور پر پیش کیا گیا ہے۔ اس کے علاوہ، ہم نے $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9, 1$

پر حل ٹیبل 6.3 میں پیش کیا ہے۔ مختلف J پر عظیم مطلق غلطیوں (MAEs) کو ٹیبل 6.2 میں دکھایا گیا ہے۔



تصویر 6.2: مسئلہ 2-

مسئلہ 3: مندرجہ ذیل فزیکشنل آرڈر PDRDE کو حل کریں۔

$$y^\alpha(t) = -\frac{1}{8}y(t) + y\left(\frac{t}{2}\right)\left(1 - y\left(\frac{t}{2}\right)\right), 0 \leq \alpha \leq 1, t \in (0, 1) \quad (6.15)$$

ابتدائی حالت

$$y(0) = \frac{1}{4},$$

کے ساتھ اور جس کا صحیح حل

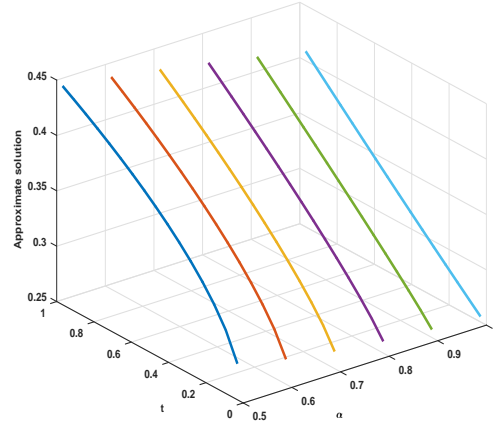
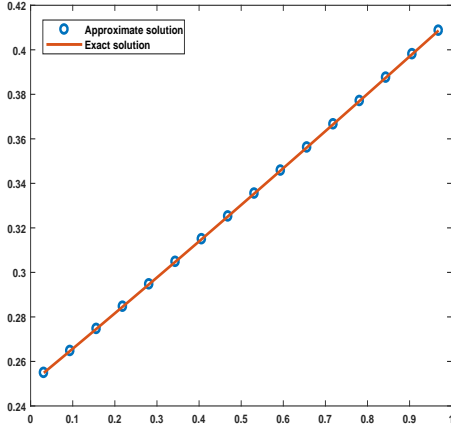
$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\sqrt{5}t}{8}\right) + \frac{\sqrt{5}}{4}\sin\left(\frac{\sqrt{5}t}{8}\right),$$

ہے۔ جب $\alpha = 1$ ہے۔

(6.15) کا تقریبی حل HWSM کا استعمال کرتے ہوئے شمار کیا ہے۔ $\alpha = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$

پر حل کا رویہ تصویر 6.3 میں گرافک طور پر پیش کیا گیا ہے۔ اس کے علاوہ، ہم نے $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9, 1$

پر حل ٹیبل 6.4 میں پیش کیا ہے۔ مختلف J پر عظیم مطلق غلطیوں (MAEs) کو ٹیبل 6.2 میں دکھایا گیا ہے۔



تصویر 6.3: مسئلہ 3-

ٹیبل 6.4: تقریباً حل $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9, 1$ (مسئلہ 3)-

y_{exact}	$\alpha = 1$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.5$	t_l
2549.0	2549.0	2572.0	2655.0	2825.0	0313.0
2746.0	2747.0	2810.0	2985.0	3248.0	1563.0
2947.0	2947.0	3031.0	3243.0	3522.0	2813.0
3150.0	3150.0	3246.0	3472.0	3743.0	4063.0
3355.0	3355.0	3457.0	3684.0	3935.0	5313.0
3562.0	3562.0	3665.0	3883.0	4106.0	6563.0
3770.0	3770.0	3871.0	4073.0	4263.0	7813.0
3981.0	3981.0	4075.0	4255.0	4407.0	9063.0

مسئلہ 4: اب موازنے کے لیے ہم لٹریچر سے درج ذیل فرکشنل ریکارڈی ڈیفریئنشل مساوات کا انتخاب کرتے ہیں [94]

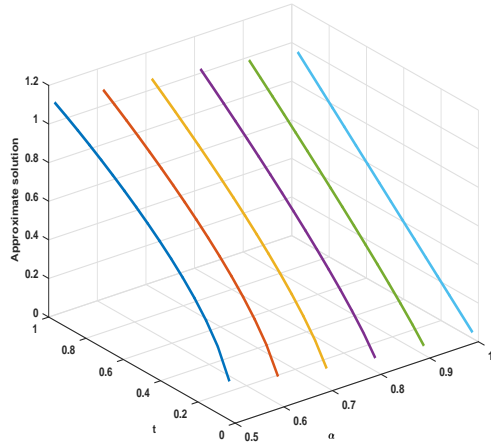
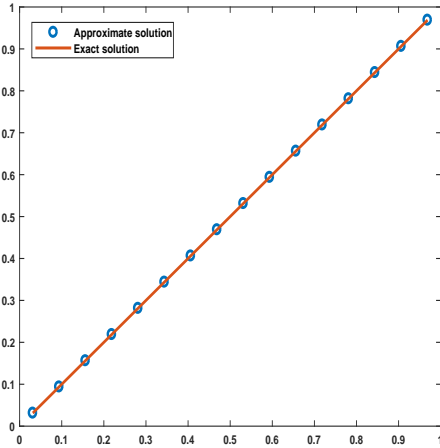
$$y^\alpha(t) = t^3 y^2(t) - 2t^4 y(t) + t^5, 0 \leq \alpha \leq 1, t \in (0, 1) \quad (6.16)$$

ابتدائی حالت

$$y(0) = 0,$$

کے ساتھ اور جس کا صحیح حل

$$y(t) = t,$$



تصویر 6.4: مسئلہ 4-

ٹیبل 6.5: تقریباً حل $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9, 1$ (مسئلہ 4)-

y_{exact}	$\alpha = 1$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.5$	t_l
0.0313	0.0313	0.0460	0.0973	0.1995	0.0313
0.1563	0.1563	0.1956	0.3001	0.4461	0.1563
0.2813	0.2813	0.3320	0.4530	0.5990	0.2813
0.4063	0.4063	0.4622	0.5863	0.7215	0.4063
0.5313	0.5313	0.5885	0.7080	0.8277	0.5313
0.6563	0.6562	0.7119	0.8220	0.9236	0.6563
0.7813	0.7812	0.8329	0.9300	1.0115	0.7813
0.9063	0.9062	0.9521	1.0332	1.0920	0.9063

ہے۔ جب $\alpha = 1$ ہے۔

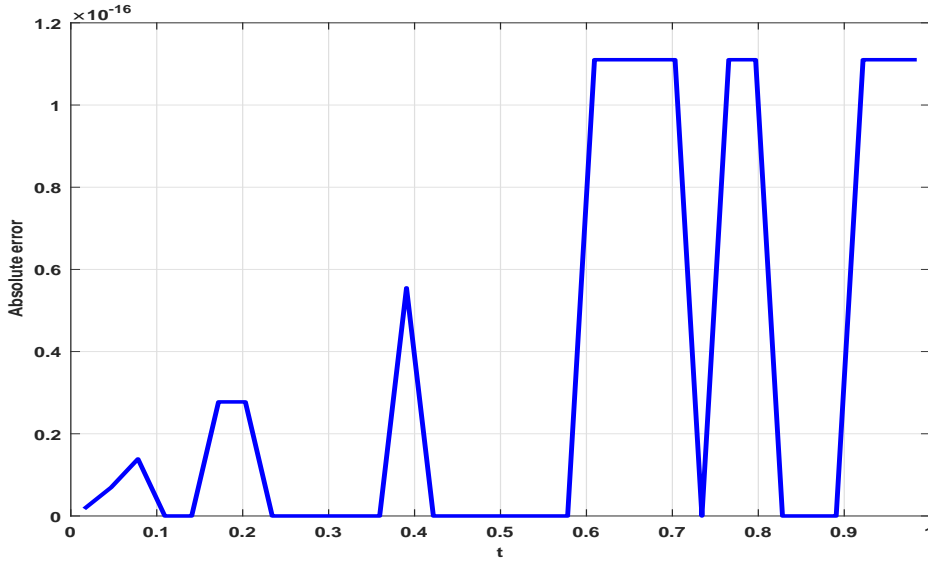
(6.16) کا تقریبی حل HWSM کا استعمال کرتے ہوئے شمار کیا ہے۔ $\alpha = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$ پر حل کا رویہ تصویر 6.4 میں گرافک طور پر پیش کیا گیا ہے۔ اس کے علاوہ، ہم نے $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9, 1$ پر حل ٹیبل 6.5 میں پیش کیا ہے۔ مختلف J پر عظیم مطلق غلطیوں (MAEs) کو ٹیبل 6.2 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے علاوہ، ٹیبل 6.7 میں ہم اپنے طریقہ کا موازنہ [37] fde solver کے ساتھ 16 کولوکیشن پوائنٹس کے لیے کیا ہے۔

ٹیبل 6.6: MAE کا موازنہ (مسئلہ 4)-

IRKHSM]94[N = 4	HWSM J = 4	HWSM J = 3
$2E - 07$	$1.1102E - 16$	$2.8315E - 08$

ٹیبل 6.7: HWSM مقابلہ FDE سولور کا موازنہ [37].

$\alpha = 1$ MAE fde Solver	$\alpha = 1$ MAE HWSM	$\alpha = 1$ fde Solver	$\alpha = 1$ HWSM	$\alpha = 0.9$ fde Solver	$\alpha = 0.9$ HWSM	$\alpha = 0.7$ fde Solver	$\alpha = 0.7$ HWSM	$\alpha = 0.5$ fde Solver	$\alpha = 0.5$ HWSM	t_1
0	0	031250.0	031250.0	031250.0	045951.0	031250.0	097275.0	031250.0	199471.0	03125.0
2.011643E-07	0	093749.0	093750.0	116997.0	123510.0	189275.0	209889.0	313356.0	345504.0	09375.0
1.132459E-06	0	156248.0	156250.0	191261.0	195600.0	287972.0	300120.0	430277.0	446102.0	15625.0
1.132459E-06	0	218748.0	218750.0	261731.0	264780.0	372261.0	379851.0	520157.0	528002.0	21875.0
1.132459E-06	0	281248.0	281250.0	329847.0	331986.0	448408.0	452972.0	596201.0	599044.0	28125.0
1.132459E-06	0	343748.0	343750.0	396267.0	397705.0	519067.0	521399.0	663572.0	662854.0	34375.0
1.132460E-06	0	406248.0	406250.0	461370.0	462240.0	585689.0	586262.0	724935.0	721469.0	40625.0
1.132464E-06	0	468748.0	468750.0	525402.0	525794.0	649179.0	648303.0	781869.0	776156.0	46875.0
1.132477E-06	0	531248.0	531250.0	588534.0	588514.0	710147.0	708035.0	835373.0	827741.0	53125.0
1.132511E-06	1.998401E-15	593748.0	593749.0	650894.0	650511.0	769025.0	765831.0	886100.0	876778.0	59375.0
1.132594E-06	4.596323E-14	656248.0	656249.0	712579.0	711872.0	826125.0	821966.0	934470.0	923624.0	65625.0
1.132784E-06	1.536992E-12	718748.0	718749.0	773664.0	772664.0	881675.0	876642.0	980737.0	968496.0	71875.0
1.133185E-06	2.236499E-11	781248.0	781249.0	834211.0	832943.0	935838.0	930006.0	025027.1	011508.1	78125.0
1.133985E-06	2.876829E-10	843748.0	843749.0	894268.0	892753.0	988726.0	982160.0	067373.1	052690.1	84375.0
1.135503E-06	3.129013E-09	906248.0	906249.0	953874.0	952131.0	040415.1	033172.1	107743.1	092022.1	90625.0
1.138263E-06	2.831572E-08	968748.0	968749.0	013060.1	011104.1	090949.1	083086.1	146071.1	129461.1	96875.0



تصویر 6.5: ویولیٹ لیول پر مطلق غلطی $J = 4$ (مستند 4)۔

6.4 خلاصہ

اس باب میں، HWSM کو proportional delay فزیکشنل ریکالٹی ڈیفریئنشل مساوات کے تقریبی کے لیے استعمال کیا گیا ہے۔ فزیکشنل کیلکولس اور اس کی ایپلی کیشنز پر ایک مختصر اکاؤنٹ بھی پیش کیا گیا۔ اس طریقہ کار کے قابل اطلاق اور افادیت کو چند بیچ مارک مسائل کو حل کر کے جانچا جاتا ہے اور حاصل کردہ نتیجہ امید افزا ہے۔ نامعلوم قطار میٹرکس کی قدروں کو مناسب سولور (solver) استعمال کر کے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ان کوفیشنٹس کا استعمال کرتے ہوئے ہار ویولیٹ سیریز کے لحاظ سے حل حاصل کیا ہے۔

اختتامی کلمات

اس مقالے میں پیش کیے گئے کام میں تاخیر (delay) ڈیفرنشیل مساوات کے ایک خاص کلاس کو حل کرنے کے لیے درست، مستحکم اور موثر عددی تکنیکوں کو قائم کرنے پر توجہ مرکوز کی ہے جسے متناسب تاخیر (proportional delay) ڈیفرنشیل مساوات کہا جاتا ہے۔

ایک عددی تکنیک، جو باب 2 میں پیش کی گئی ہے، متناسب تاخیر ریکارڈڈ ڈیفرنشیل مساوات کو حل کرنے کے لیے ڈیزائن کی گئی ہے۔ اس تکنیک میں، ہارویولٹس کو ان کی کم کمپیوٹیشنل لاگت اور سادہ ریاضیاتی عبارت کی وجہ سے ترجیح دی ہے۔ تکنیک کی کارکردگی اور درستگی کو ظاہر کرنے کے لیے، کئی مثالوں کو حل کیا گیا ہے۔

مجوزہ طریقہ کے نفاذ کا عددی موازنہ میزمرہ کروڑ طریقہ، اور درست حل کے درمیان کیا گیا ہے۔ عددی تجربہ بتاتا ہے کہ ہارویولٹ سیریز کے طریقہ کار نے درستگی دی ہے جو ویولٹ کی مختلف ریزولوشنز کے لیے $O(10^{-5}) - O(10^{-9})$ کے درمیان پائی گئی ہے۔

متناسب تاخیر کی نوعیت کے Dirichlet BVPs اور سائیمپلٹینوس متناسب تاخیر کی ڈیفرنشیل مساوات کو حل کرنے کے لیے طریقہ کو بڑھایا اور تیار کیا گیا ہے، جو بالترتیب باب 3 اور 4 میں پیش کیے گئے ہیں۔ یہ طریقہ BVPs کو حل کرنے کے لیے ایک موثر ریاضیاتی ٹول کے طور پر ثابت ہوا ہے کیونکہ اس میں حد کے حالات کو خود بخود شامل کرنے کی صلاحیت ہے۔ بیچ مارک مسائل حل کیے ہیں اور عظیم مطلق غلطیاں اور کنورجنس ریٹ کا حساب لگایا گیا ہے۔

BVPs کی درستگی ویولٹ کی مختلف ریزولوشنز کے لیے $O(10^{-4})$ اور $O(10^{-10})$ کے درمیان ہے (ٹیبل 3.1)۔ نیز، متناسب تاخیر IVPs اور BVPs کے لیے کنورجنس کی شرح نظریاتی قدر یعنی 2 کے ساتھ موافق ہے۔

اسی طرح، طریقہ سائیمپلٹینوس متناسب تاخیر کی ڈیفرنشیل مساوات کو حل کرنے کے لیے بڑھایا جاتا ہے۔ دو اور تین نامعلوم فنکشنز کے ساتھ خطی اور غیر خطی مسائل کو حل کیا گیا ہے اور ہارویولٹ سیریز

کے طریقہ کار کے ذریعے حاصل کردہ حل اور درست حل کے درمیان موازنہ کیا گیا ہے۔ اعداد و شمار 4.3 اور 4.6 سے یہ دیکھا گیا ہے کہ ریزولوشن میں اضافہ عظیم مطلق غلطیوں میں کمی کا باعث بنتا ہے اور طریقہ سائٹمپلٹینیس ڈیفرنشیل مساوات کے لیے بھی اچھی کارکردگی کا مظاہرہ کرتا ہے۔

باب 5 میں، الیکٹروڈائنامکس میں پیدا ہونے والے اعلیٰ ترتیب والے ملٹی پینوگراف مساوات کے حل کی تحقیقات کے لیے ایک ترمیم شدہ ہارویولٹ اپروچ قائم کیا گیا ہے۔ اس ترمیم شدہ نقطہ نظر میں، امتیازی مساوات میں موجود اعلیٰ ترین مشتق (n^{th}) فنکشنز کی بجائے نامعلوم فنکشن کے $(n+1)^{th}$ مشتق کو ہارویولٹ سیریز میں نامعلوم گٹانک کے ساتھ تقریب دی جاتی ہے۔ اور دیگر مشتقات انٹیگریشن کے ذریعے حاصل کیے جاتے ہیں۔ یہ نقطہ نظر مسئلہ کو الجبری مساوات کے ایک سیٹ میں تبدیل کرتا ہے اور اس طرح حل کے عمل کو آسان بناتا ہے۔ عددی نتائج سے پتہ چلتا ہے کہ یہ طریقہ کار آمد، مضبوط اور موجودہ طریقوں (دیکھیں، ٹیبل 5.1, 5.7) جیسا کہ دو مرحلے کا RKM، θ One-leg، طریقہ، VIM، اور RKHS طریقہ سے بہتر ہے۔

آخر میں، باب 6 میں، ہار کے فریکشنل انٹیگرلز کو R-L کے معنی میں بیان کیا گیا ہے اور پھر فریکشنل DEs کے عددی حل کو حاصل کرنے کے لیے ہارویولٹس پر مبنی ایک موثر الگورتھم قائم کیا گیا ہے۔ جدول 6.6 اور 6.7 میں دیے گئے عددی تقالی کے نتائج واضح طور پر IRKHSM اور FDESOLVER پر HWSM کی برتری کی نشاندہی کرتے ہیں۔ درستگی ویولٹ کی مختلف ریزولوشنز کے لیے $O(10^{-05}) - O(10^{-10})$ (ٹیبل 6.2) کے درمیان پائی گئی ہے جب کہ ایک صورت میں یہ $O(10^{-16}) - O(10^{-08})$ (ٹیبل 6.7)۔ مستقبل کی ممکنہ تحقیق کی سمت یہ ہو سکتی ہے:

(۱)۔ تاخیر کے فریکشنل آرڈر PDEs کو حل کرنے کا ایک عددی طریقہ۔

(۲)۔ ویولٹس کا استعمال کرتے ہوئے جزوی تاخیر کے ڈیفرنشیل ماڈلز کو ڈیزائن اور ان کی تحقیقات کرنا۔