

**Maulana Azad National Urdu University**  
**M.Sc. (Maths) I Semester Examination, March 2023**

**MSMM101CCT : Real Analysis - I**

**پرچہ : حقیقی تجزیہ - I**

Time : 3 hrs

Marks : 70

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارہ ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔  
(10 x 1 = 10 Marks)

2. حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دو سو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔  
(5 x 6 = 30 Marks)

3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو (500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔  
(3 x 10 = 30 Marks)

**حصہ اول**

سوال نمبر 1:

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \quad (i)$$

(a)  $\phi$  (b) (-1,1) (c) { 0 } (d) ان میں سے کوئی نہیں

(ii) سٹ کے Interior Point کی تعریف کرو۔

(iii) سٹ  $S = \left\{ \frac{1}{n} / n \in N \right\}$  کا Limit Point ہے۔

(a) { 0,1 } (b) { 1 } (c) { 0 } (d) ان میں سے کوئی نہیں

(iv) Closed Set کی ایک مثال دو۔

(v) تفاعل  $f : E \rightarrow Y$  کی Limit واحد (Unique) ہے۔ (صحیح/غلط)

(vi)  $f(x) = |x|$  پر Continuous نہیں ہے (صحیح/غلط)

(vii) اگر  $P = \{2, 5, 4, 5, 6\}$  [2,5] کی تقسیم (Partition) ہے اس کے دو Refinements بناؤ۔

(viii)  $L(P, f, \alpha)$  اور  $U(P, f, \alpha)$  کی تعریف کرو۔

(ix)  $\forall x \in s = [-a, a] 0 < a < 1$  کے لیے  $f_n(x) = x^n$  ہو تب  $f(x) = 0$  ہوگا  $f_n(x) \rightarrow f(x)$

(x) Pointwise Convergence کی تعریف کرو۔

## حصہ دوم

(2) تعریف کرو اور ایک مثال دو۔

(a) متناہی سٹ (finite Set) (b) شمار پذیر سٹ (Countable Set) (c) غیر شمار پذیر سٹ (Uncountable set)

(3) مستحق تو اتر (Convergent Sequence) کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ ہر bounded 'convergent sequence' ہے۔

(4) Cauchy's Integral Test کی مدد سے سلسلہ  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)}$  کے Convergence کی جانچ کرو۔

(5) ثابت کرو کہ (i)  $\bar{E}$  Closed سٹ ہے۔ اور

(ii)  $\bar{E} = E \Leftrightarrow E$  Closed ہے۔

(6) Compact سٹ کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ میٹرک فضا (Metric Space) کا ہر Compact سٹ بند (Closed) سٹ ہوگا۔

(7) اگر  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$  ہو تب بتلاؤ کہ  $f$  پر  $x=0$  Continuous ہے لیکن تفرق پذیر (Differentiable) نہیں ہے۔

(8) اگر  $f(x) = x^2 \forall x \in [0, 1]$  تب Partition  $P = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1 \right\}$  کے لیے  $L(P, f)$  اور  $U(P, f)$  معلوم کرو۔

(9) Sequence of Function  $\langle f_n \rangle_{n=1}^{\infty}$  کے Uniform Convergence کی تعریف کرو۔ ایک مثال دو۔

## حصہ سوم

(10) استدقاق (Convergence) کی جانچ کرو۔

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$  (b)  $\frac{1^2 \cdot 2^2}{1!} + \frac{2^2 \cdot 3^2}{2!} + \frac{3^2 \cdot 4^2}{3!}$  (c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

(11) اگر  $(X, d)$  Metric Space کا  $E$  ایک تحت سٹ (Subset) ہو تب ثابت کرو کہ  $E$  کھلا سٹ (Open Set) ہوگا  $\Leftrightarrow E^c$  بند سٹ (Closed Set) ہے۔

(12)  $[a, b]$  کے تقسیم (Partition)  $P$  کے Refinement کی تعریف کرو۔ اگر  $P^*$  Partition 'P' کا Refinement ہے۔ تب ثابت کرو کہ  $L(P, f, \alpha) \leq L(P^*, f, \alpha)$  ہوگا جہاں  $\alpha$  پر  $[a, b]$  Monotonically Increasing تفاعل ہے اور  $f$  پر  $[a, b]$  Bounded تفاعل ہے۔

(13) (i) ثابت کرو کہ ہر Continuous تفاعل  $f$  پر  $[a, b]$  پر Riemann–Stieltjes تکمیل پذیر (Integrable) ہوگا۔ اور

(ii) بتلاؤ کہ ہر Riemann–Stieltjes Integral Monotonic Function ہے۔

(14) Uniform Convergence کی کوش کسوٹی (Cauchy Criteria) کو بیان اور ثابت کرو۔