

Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. Maths (MSMM102CCT) I Semester Examination - March - 2023

Paper : Linear Algebra

پرچہ : لائنیر الجبرا

Time : 3 hrs

Marks : 70

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارہ ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ (10 x 1 = 10 Marks)

2. حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دو سو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔ (5 x 6 = 30 Marks)

3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو (500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ (3 x 10 = 30 Marks)

حصہ اول

سوال نمبر 1:

(i) اگر A ایک Unitary Matrix ہو تو A کے Eigen Values ہیں۔

(a) 1, -1 (b) 1, -1 (c) i, -i (d) -1, i

(ii) 2x2- Matrices کے subspace کا Dimension جو ماترِس (Matrices) اور $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ سے Spanned ہے..... ہوگا۔

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(iii) U اور V، R^4 کے Subspaces اس طرح سے ہیں کہ

$$U = \text{Span} [(2, 1, 3, 5), (3, 5, -2, 2), (3, 1, 4, -3)]$$

$$V = \text{Span} [(1, 3, 1, 7), (2, 1, 0, -2), (2, 1, 4, 2)]$$

تب L (U,V) کا Dimension ہے۔

(a) 3 (b) 6 (c) 9 (d) ان میں کوئی بھی نہیں

(iv) اگر A ایک 4x4 Matrix ہے اور $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 91 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ہو تب _____ ہوگا۔

(a) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2$ (b) $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$

1/3

(d) $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 4$

(c) $x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = -1$

(v) اگر A ایک Square Matrix اس طرح ہے کہ $\det A = \text{trace } A$ اور eigen values کا sum = ان کے حاصل ضرب کے مساوی ہو تب A ہوگا۔

Diagonal Matrix (b) Upper Triangular Matrix (a)
Nilpotent Matrix (d) Idempotent Matrix (c)

(vi) Rank-Nullity کے نظریہ کو بیان کرو۔

(vii) Inner Product Space میں Norm کی تعریف ذیل سے کی جاسکتی ہے۔

(a) $\|V\| = \langle v, v \rangle$ (b) $\|V\| = \langle u, v \rangle$ (c) $\|V\| = \langle v, v \rangle^2$ (d) کسی سے بھی نہیں

(viii) فرض کرو کہ $A \in M_{3 \times 3}(R)$ ، تب $(t^2 + 1)$ Polynomial ہے۔

Characteristics Polynomial کا A (b) Minimal Polynomial کا A (a)
(c) a اور b دونوں صحیح ہیں (d) کوئی بھی صحیح نہیں ہے۔

(ix) میٹرکس کے Eigen values ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) 1, -i, 1, 1 (b) 1, 3, -1, 5 (c) 1, 2, 5, 6 (d) کوئی بھی نہیں

(x) اگر A میٹرکس diagonalizable ہیں۔

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^n P^{-1} \text{ (a)}$$

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^n P \text{ (b)}$$

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^n P^{-1} \text{ (c)}$$

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^n P \text{ (d)}$$

حصہ دوم

(2) کسی برداری فضا $V(F)$ کے تحت فضا کی تعریف کرو کسی میدان F پر برداری فضا کے ابعاد سے کیا مراد ہے۔ اگر ایک محدود ابعادی برداری فضا V کے دو تحت فضا U اور W ہوں تو ثابت کرو کہ $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

(3) ایک برداری فضا کی تعریف کرو V میں برداروں $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ کے خطی امتزاج کی تعریف کرو۔ برداروں کا میدان F پر خطی طور پر تابع اور غیر تابع ہونے کی تعریف کرو۔

(4) Nullity کے Sylvester Law کو بیان اور قائم (establish) کریں۔

(5) مان لو $a_1 = (-1, 0, 2)$ ، $a_2 = (0, 1, -2)$ اور $a_3 = (-2, -1, -1)$ کے ویکٹرز ہیں۔ اگر f پر ایک Linear Functional

اس طرح سے ہے کہ $f(a_1) = 1$ ، $f(a_2) = -1$ اور $f(a_3) = 3$ تب $a = (x, y, z)$ کے لیے $f(a)$ معلوم کرو۔

(6) فرض کرو کہ U اور V 'F' Field پر Vector Spaces ہیں تب Addition اور Scalar Multiplication کی تعریف کرو جس سے $\text{Hom}(U, V)$ پر Vector Space بن جائے۔

(7) برداروں $\alpha_1 = (-1, -1, -1), \alpha_2 = (1, 2, 1), \alpha_3 = (3, -5, 2)$ کی خطی طور پر تابع ہونے کا امتحان کرو۔

(8) Inner Product کی تعریف کرو۔ Inner Product Space کے دو مثال پیش کیجیے۔

(9) فرض کرو کہ V اور Z فیلڈ F پر Vector Spaces ہیں۔ فرض کرو کہ T ایک Linear Transformation ہے V onto Z ، اگر T, W کا Null Space ہے تب بتلاؤ کہ V/W اور Z Isomorphic ہیں۔

حصہ سوم

(10) Cayley - Hamilton Theorem کو بیان اور ثابت کرو۔

(11) میٹرکس (Matrix) $A = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ کے Eigen Values اور Eigen Vectors معلوم کرو۔

(12) کسی میدان F پر کسی برداری فضاء V کی ایک اور برداری فضاء W پر خطی تحویل کی تعریف کرو۔ اگر V ایک برداری فضاء ہو تو بتلاؤ کہ متماثلی تحویل $I\alpha = \alpha$ اور $0\alpha = 0$ بھی V سے V پر خطی تحویلات ہیں۔

(13) R^2 سے R^2 کے ذیل کے کون سے تفاعلات T خطی تحویل ہیں۔

i) $T(x_1, x_2) = (2+x_1, 1-x_2)$ ii) $T(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$

(14) اگر V, F پرایک Finite Dimensional ویکٹراسپیس (Space) ہے تو V کے dual V^* کی تعریف کرو اور بتلاؤ کہ $\dim V = \dim V^*$ ۔

☆☆☆