Maulana Azad National Urdu University
Department of Mathematics
M.Sc Mathematics II Semester Examination - July - 2023
Paper : MSMM201CCT : Algebra
پرچہ : الجبرا

Total Marks : 70 Time : 3 hours

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئےلفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ (10 x 1 = 10 Marks)
2. حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔ (5 x 6 = 30 Marks)
3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو(500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے10 نمبرات مختص ہیں۔ (3 x 10 = 30 Marks)

حصہ اول

سوال: 1

(i) فرض کرو کہ $f: G \to G'$ ایک گروپ ہم مارفیت (Group Homomorphism) ہے اور $a \in G$ اگر O(a) متناہی (Finite) ہے تب

(A) $O(f(a)) = \infty$ (B) $O(f(a)) < \infty$ (C) $O(a) > O(f(a))$ (D) ان میں کوئی بھی نہیں

(ii) پرائم رتبہ (Prime Order) کا ہر گروپ سائیکلی گروپ (Cyclic Group) ہوتا ہے۔ (صحیح/غلط)

(iii) n- رتبہ (nth Order) والا Cyclic Group.......................... سے Isomorphic ہے۔

(A) (Z, +) (B) $(Z_n, +_n)$ (C) $(Z_n, \times_n)$ (D) $(Z'_n, \times_n)$

(iv) اگر f = (1,2,3,4) تب f^3 ہے۔

(a) (1,3) (2 4) (b) (1 3) (c) (2 4) (d) ان میں سے کوئی نہیں

(v) گروپ $(G = \{1,2,3,\dots,10\}, x_{11})$ میں '5' کا معکوس (Inverse) ہے۔

(a) 5 (b) 4 (c) 2 (d) ان میں سے کوئی نہیں

(vi) Euclidean Domain کی ایک مثال دو۔

(vii) اگر G ایک گروپ ہے جس کا رتبہ (Order) 36 ہے اور H ایک تحت سٹ اس طرح ہے کہ $|H| = 7$ تب:

(A) G ‘H نارمل تحت گروپ (Normal Sub Group) ہے (B) G ‘H کا Abelian تحت گروپ ہے

(C) G ‘H کا تحت گروپ نہیں ہے۔ (D) (A) اور (B) دونوں صحیح ہے۔

P.T.O

(viii) اگر 'a' رنگ R (Ring) کا Unit ہے تب a .... ہے۔

(A) Zero Divisor (B) اکائی عنصر (Identity Element)

(C) صفر (Zero) (D) Invertible Element

(ix) کثیر رکنی (Polynomial) $f(x) \in R[x]$ monic ہے۔ اگر..................... ہو۔

(x) $9x^2 - 3$ ....پر تحویل پذیر (Reducible) ہے۔

(A) $\mathbb{Z}$ (B) $\mathbb{R}$ (C) $\mathbb{N}$ (D) ان میں کوئی بھی نہیں

حصہ دوم

2. بتلاؤ کہ $f : R \to R^+$ جس کی تعریف $f(x) = e^x \;\forall x \in R$ ہے ایک گروپ Homomorphism ہے۔ f کا Kernel معلوم کرو۔

3. اگر G ایک گروپ ہے اور G کا رتبہ p^2 ہے ($O(G) = p^2$, p=prime number) بتلاؤ کہ G ایبلیان (abelian) ہے۔

4. رنگ کے ہم مارفیت کے بنیادی قضیہ (Fundamental Theorem of Homomorphism) کو بیان اور ثابت کرو۔

5. انٹگرال دامنہ (Integral Domain) کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ ہر میدان (Field) انٹگرال دامنہ ہوتا ہے۔

6. اگر G ایک گروپ ہے جہاں تین consecutive integers کے لیے $(ab)^n = a^n b^n \;\forall a,b \in G$ ہے تب بتلاؤ G abelian ہے۔

7. ثابت کرو کہ متناہی انٹگرل دامنہ (Finite Integral Domain) ایک میدان (Field) ہے۔

8. Unique Factorization Domain کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ ہر PID ایک UFD ہے۔

9. رنگ Homomorphism $\phi : R \to R'$ کی تعریف کرو۔ بتلاؤ کہ $\ker\phi$ R' کا Ideal ہے اور $\mathrm{Image}\,(\phi)$ R' کی Subring ہے۔

حصہ سوم

10. لگرانج (Lagrange) کے نظریہ کو بیان اور ثابت کرو۔

11. a) فرض کرو کہ 'H' گروپ G کا ایک تحت گروپ (Sub Group) ہے۔ اگر H کے دو دائیں Cosets کا ضرب دایاں Cosets ہے تب بتلاؤ کہ H Normal تحت گروپ ہوگا۔

b) Quarternion کے گروپ کی تعریف کرو اور اس کے تمام Normal Subgroups معلوم کرو۔

12. a) Commutative Ring, field اور Skew field کی تعریف کرو۔

b) $(\mathbb{Z}_{23}, +_{23}, \times_{23})$ ایک میدان ہے یا نہیں وضاحت کیجیے۔

13. $n > 1$ کے لیے Z_n ایک میدان (Field) ہے $\Leftrightarrow n$ ایک Prime عدد ہے۔

14. a) Euclidean Domain کی تعریف ایک مثال کے ذریعہ کرو۔

b) اگر D ایک UFD ہے تب بتلاؤ کہ D[x] بھی UFD ہوگا۔

☆ ☆ ☆