Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. Mathematics II Semester Examination - July - 2023

Paper : (MSMM201DST) Complex Analysis

پرچہ: ملتف تجزیہ

Total Marks : 70 **Time : 3 hours**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو (500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال: 1

i۔ تفاعل (function) $f(z)=\begin{cases} z^2, & z\neq i \\ 0, & z=i \end{cases}$ ، $z=i$ پر discontinuous ہے۔ (صحیح/غلط)

ii۔ تفاعل (function) $f(z)=|z|^2$ ، $z=0$ پر analytic ہے۔ (صحیح/غلط)

iii۔ تفاعل (function) $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ کے لئے کوشی ریمان مساواتوں (Cauchy-Riemann Equations) ________ ہیں۔

(a) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ (b) $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$

(c) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}$ (d) $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}$

iv۔ ان میں سے کونسا غلط ہے

(a) $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ (b) $|z_1+z_2|\ge|z_1|+|z_2|$

(c) $|z_1-z_2|\le|z_1|+|z_2|$ (d) $|z_1-z_2|\ge|z_1|-|z_2|$

v۔ Schwarz's Lemma کو بیان کرو۔

vi- $f(z)=\frac{z^2+2}{(z+1)(z^2+1)}$ کے پولس (poles) ---------- ہیں۔

(a) $z=1,\pm i$ (b) $z=-1,\pm i$ (c) $z=1,\pm 2i$ (d) $z=-1,\pm 2i$

vii- z=0، $f(z)=\frac{z-\sin z}{z^3}$ کے لیے ________ ہے۔

(a) Essential singularity (b) Branch point

(c) Simple pole (d) Removable singularity

viii- تفاعل (function) $f(z)=z^2+z$ کے critical نقطہ (point) ------ ہے

(a) $z=\frac{1}{2}$ (b) $z=-\frac{1}{2}$ (c) $z=\frac{3}{2}$ (d) $z=-\frac{3}{2}$

ix- تفاعل (function) $w=z+\beta$، جہاں β ایک complex constant ہے ____________ transformation دیتا ہے۔

(a) Magnification (b) Rotation (c) Inversion (d) Translation

x- Transformation $w=\bar{z}$ ____________ ہے۔(Conformal/Isogonal)

حصہ دوم

2- کوشی ریمان مساواتوں (Cauchy-Riemann Equations) کو پولر شکل (polar form) میں حاصل کرو۔

3- بتلاؤ کہ $f(z)=u+iv$ جہاں $f(z)=\frac{x^2y^5(x+iy)}{x^4+y^{10}}$، $(z\neq 0)$، $f(0)=0$ کوشی ریمان مساواتوں (Cauchy-Riemann Equations) کو Origin پر پورا کرتا ہے، لیکن $f(z)$ origin پر analytic نہیں ہے۔

4- $\int_0^{1+i} z^2dz$ کو اخذ (Evaluate) کرو۔

5- Cauchy Integral ضابطہ (formula) کے استعمال سے $\int_{|z|=3}\frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$ کو اخذ (Evaluate) کرو۔

6- تفاعل (function) $f(z)=\frac{z^2-4}{(z+1)(z+4)}$ کا رتجنس (regions) (i) $1<|z|<4$ اور (ii) $|z|>4$ پر پھیلاو (expansions) معلوم کرو۔

7- تفاعل (function) $f(z)=\frac{z^4}{(z^2+1)^2}$ کے finite plane میں سبھی پولس (poles) پر ریسیڈیو (Residue) معلوم کرو۔

8- Bilinear transformation تلاش کریں جو نقطہ $z=-1,0,1$ کو نقطہ $w=0,i,3i$ میں نقش کرتا ہے۔

9- استحالہ (Transformation) $w=\frac{1}{z}$ کے تحت لامحدود پٹی (infinite strip) $\frac{1}{4}<y<\frac{1}{2}$ کا عکس (image) معلوم کرو۔

حصہ سوم

۱۰۔ (i) ثابت کرو کہ $f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y)$ holomorphic ہے اور اسکا derivative معلوم کرو۔

(ii) اگر $f(z)=u+iv$ ایک analytic function ہے اور $u-v=e^{x}(\cos y-\sin y)$ تب $f(z)$ معلوم کرو۔

۱۱۔ Morera's Theorem کو بیان اور ثابت کرو۔

۱۲۔ Taylor's Theorem کو بیان اور ثابت کرو۔

۱۳۔ Contour Integration کے استعمال سے $\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ کو اخذ (Evaluate) کرو۔

۱۴۔ (i) $w=\frac{(2+i)z-2}{z+i}$ کے fixed points اور Normal form معلوم کرو۔

(ii) Transformation $w=z^{2}$ میں خط (line) $x=4$ کی image معلوم کرو۔

☆ ☆ ☆