Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Mathematics) II Semester Examination, July 2023

Paper - MSMM202CCT : Topology

پرچہ : ٹوپولوجی

Marks : 70

Time : 3 hrs

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔
(10 x 1 = 10 Marks)

2. حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو(200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔
(5 x 6 = 30 Marks)

3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جوب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو(500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔
(3 x 10 = 30 Marks)

حصہ اول

سوال:1

i. لمٹ پوائنٹ (Limit Point) کی تعریف کیجیے۔

ii. فرض کیجیے کہ x = {a, b, c, d, e} اور $\tau = \{\{x, \phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$ ہے تب A={a,b,c} کے لیے Interior Points معلوم کیجیے۔

iii. ثابت کیجیے کہ اگر M اور N نقطہ p (Point) کے دو Neighbourhood ہیں تب $M \cap N$ بھی p کا Neighborhood ہوگا۔

iv. فرض کیجیے کہ E Compact اور F Closed ہیں تب $E \cap F$ Compact ہوگا۔ (صحیح/غلط)

v. Compact Spaces کا ضرب (Product) Compact نہیں ہوتا ہے۔ (صحیح/غلط)

vi. "Connected Set" کی تعریف کیجیے۔

vii. فرض کیجیے کہ $E \subseteq R$ ہے جس کے اندر کم سے کم .... نقطہ موجود ہیں تب E Connected ہوگا اگر اور صرف اگر E ایک Interval ہے۔

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

viii. فرض کیجیے کہ X میں $< a_1, a_2, ... >$ کوئی Cauchy Sequence ہے اور $< a_{i1}, a_{i2}, ... >$ اس Sequence $< a_n >$ کی Subsequence ہے۔ تب $\lim_{n \to \infty} < a_n, a_{in} > = ...$

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) ان میں سے کوئی نہیں

ix. کوئی X Compact Metric Space ضروری نہیں کہ Complete ہو (صحیح/غلط)

x. exterior point کی تعریف کیجیے۔

حصہ دوم

2۔ فرض کیجیے کہ $X = R$ اور $\tau = \{\phi, G \subseteq R | x \in G \Rightarrow -x \in G\}$ تب ثابت کیجیے کہ (X,τ) ایک ٹوپولوجیکل اسپیس (Topological Space) ہے۔

3۔ فرض کیجیے کہ (X,τ) ایک ٹوپولوجیکل اسپیس ہے اور $A \subset X$ تب ثابت کیجیے کہ $A \cup A'$ Closed ہے۔

4۔ "Heine-Borel Theorem" کو بیان اور ثابت کیجیے۔

5۔ "Bolzano Weirstrass Property" کو بیان کیجیے۔ثابت کیجیے کہ ہر ایک Compact Space BWP رکھتا ہے۔

6۔ ثابت کیجیے کہ کسی میٹرک اسپیس میں کوئی بھی Closed Sphere ایک Closed Set ہوتا ہے۔

7۔ ثابت کیجیے کہ کسی Normal Space کا ہر ایک Closed Subspace بھی نارمل (Normal) ہوگا؟

8۔ "Totally Disconnected Space" کی تعریف کیجیے ثابت کیجیے کہ $Q \subset R$ ایک T.D.S ہے۔

9۔ ثابت کیجیے کہ ہر ایک Second Countable Topological Space سپریبل (Separable) ہوگا؟

حصہ سوم

10۔ فرض کیجیے کہ $(X \neq \phi)$ اور B اس کے Subsets کا مجموعہ ہے تب ثابت کیجیے کہ X کے اوپر کسی τ Topology کے لیے B ایک Base ہوگا اگر اور صرف اگر

(i) $X = \bigcup\{\beta | \beta \in B\}$

(ii) $\forall x \in \beta_1 \cap \beta_2 \exists \beta_3 \in B \ni x \in \beta_3 \subset \beta_1 \cap \beta_2, \forall \beta_1, \beta_2 \in B$

11۔ فرض کیجیے کہ $h:(X,\tau_1) \xrightarrow{onto} (Y,\tau_2)$ ایک 1-1 میپ ہے۔تب مندرجہ مساوی ہیں:

(i) h ایک Homeomorphism ہے

(ii) h open اور Continuous ہے

(iii) h Closed اور Continuous ہے۔

(iv) $\forall A \subset X, h(\overline{A}) = \overline{h(A)}$

12۔ ثابت کیجیے کہ کوئی ٹوپولوجیکل اسپیس (X,τ) ریگولر ہوگا اگر اور صرف اگر $\forall x \in G \in \tau \exists H \in \tau \ni x \in H \subset \overline{H} \subset G$

13۔ فرض کیجیے کہ (X,τ) ایک ٹوپولوجیکل اسپیس ہے اور $A \subset X$ Connected ہے اور $A \subset B \subset \overline{A}$ تب ثابت کیجیے کہ B بھی Connected ہوگا اور اس لیے $\overline{A}$ بھی Connected ہوگا۔

14۔ "Sequentially Compact" میٹرک اسپیس کی تعریف کیجیے۔فرض کیجیے کہ (X,d) ایک "Sequentially Compact Metric Space" ہے تب ثابت کیجیے کہ (X,d) Totally Bounded ہے۔

☆☆☆