Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Mathematics) II Semester Examination, July 2023

Paper - MSMM213CCT : Real Analysis - II

پرچہ : حقیقی تجزیہ - II

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. **حصہ اول** میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. **حصہ دوم** میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو(200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. **حصہ سوم** میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جوب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو(500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے10 نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال 1:

i. $f(x) = e^x$

(a) continuous ہے (b) differentiable ہے (c) (a) اور (b) دونوں (d) ان میں سے کوئی نہیں

ii. تفاعل $f(x) = x Sin\frac{1}{x} (x \neq 0)$ ، $f(0)=0$ ، $x=0$ پر مسلسل (Continuous) ہے۔ (صحیح/غلط)

iii. کسی سیٹ E پر Pointwise Bounded Sequence of Functions کی تعریف کرو۔

iv. یکساں تسلسل (Uniformly Continuous) تفاعل کی تعریف کرو۔

v. قوتی سلسلہ (Power Series) کے Radius of Convergence کی تعریف کرو۔

vi. = E (1)

(a) e (b) $\frac{1}{e}$ (c) e^2 (d) ان میں سے کوئی نہیں

vii. $log\ (1+x)$ کے پھیلاؤ کو دیجیے۔

viii. $= m^*(\mathbb{Z})$

(a) Finite (b) Infinite (c) 0 (d) ان میں سے کوئی نہیں

ix. اگر A ,[0,1] کے تمام Irrational Numbers کا سٹ ہو تب m*(A)=

(a) 0 (b) 1 (c) 1/2 (d) ان میں سے کوئی نہیں

x. اگر ایک تفاعل 'f' کسی سٹ E پر Measurable ہے تب وہ E کے ہر تحت سٹ (Subset) A پر بھی Measurable ہوگا۔ (صحیح/غلط)

حصہ دوم

2- تفاعلوں کے Equi-continuous خاندان کی تعریف کرو اور ایک مثال دو۔

3- فرض کرو کہ K ایک Compact Set ہے اور $f_n \in C(K)$ ....$\forall n = 1,2,3$ اگر $<f_n>$ 'K پر Pointwise Bounded اور Equi-continuous ہے تب بتلاؤ کہ $<fn>$ 'K پر Uniformly Bounded ہے۔

4- فرض کرو کہ $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ متدق (Convergent) ہے۔ اگر $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \; (-1<x<1)$ تب ثابت کرو کہ

$$\underset{x\to 1}{Lin}\, f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n = f(1)$$

5- Power Series کی تعریف کرو۔ اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ ہو تب اس Power Series کے Radius of Convergence کو معلوم کرو۔

6- کسی Vector Space میں خطی طور پر تابع اور خطی طور پر غیر تابع بردار (Linearly Dependent and Linearly Independent Vectors) کی تعریف کرو اور ایک مثال دو۔

7- فرض کرو کہ X ایک f.d.v.s ہے تب ثابت کرو کہ ایک خطی عامل (linear Operator) T ایک۔ایک ہوگا اگر Range (T)=X ہو۔

8- کسی سٹ کے Outer Measure کی تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ Countable set کا Outer Measure صفر (Zero) ہے۔

9- بتلاؤ کہ Dirichlet تفاعل $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ جس کی تعریف ہے۔ $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ L-Integrable ہے مگر R-Integrable نہیں ہے۔

حصہ سوم

10- فرض کرو کہ $<f_n>$ کسی Countable Set E پر Pointwise بستہ تواتر (Bounded Sequence) ہے تب ثابت کرو کہ ایک Subsequence $<f_{n_k}>$ اس طرح ہوگا کہ $\forall x\in E\left\{f_{n_k}(x)\right\}$ متدق (Convergent) ہے۔

11- ثابت کرو کہ: (i) $E(x+y)=E(x).E(y)$

(ii) $E(x)>0$ ہے $\forall x\in\mathbb{R}$

(iii) جب $x\to\infty$ ہے $E(x)\to\infty$ اور جب $E(x)\to 0, x\to -\infty$ ہوگا۔

12- Contraction Map کی تعریف کرو اور ایک مثال دو۔ بتلاؤ کہ Contraction Map Uniformly Continuous ہوگا۔

13- Measurable Set قابل پیمائش سٹ کی تعریف کرو بتلاؤ کہ ہر وہ سٹ جس کا Outer Measure صفر ہے' Measurable ہوگا نیز بتلاؤ کہ Countable Set ' Measurable ہے۔

14- Lebesgue Integral کی تعریف کرو۔ اگر f,g کسی سٹ E پر بستہ Measurable Function ہیں جب کہ E کی پیمائش متناہی (Finite) ہے تب $\int_E (af+bg) = a\int_E f + b\int_E g$

☆☆☆