Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Mathematics) IV Semester Examination, July 2023

Paper - MSMM404CCT : Functional Analysis

Time : 3 hrs | **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جوب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو (500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال 1:

i. کسی بھی normed space کا ایسا subset جو compact ہو۔ complete ہوگا۔ (صحیح/غلط)

ii. $f(x)=\sin x$ انٹرویل $[-\pi,0]$ پر convex function نہیں ہے۔ (صحیح/غلط)

iii. فرض کیجیے کہ A کسی normed space X کا subset ہے تب ہم A کو X میں dense کہتے ہیں اگر

(a) $\overline{A}=X$ (b) $\overline{A}\neq X$ (c) $\overline{A}=\{0\}$ (d) ان میں سے کوئی نہیں

iv. فرض کیجیے کہ $(X,<\cdot,\cdot>)$ ایک inner product space ہے۔ تب ثابت کیجیے کہ $<x,0>=0$ ، $\forall x\in X$

v. اگر $X\neq\{0\}$ ایک Hilbert Space ہے تب

(a) $\|x\|=Sup\{|<x,y>|:y\in X,\|y\|=0\}$ (b) $\|x\|=Sup\{|<x,y>|:y\in X,\|y\|=1\}$

(c) $\|x\|=Sup\left\{|<x,y>|,y\in X,\|y\|=\frac{1}{2}\right\}$ (d) ان میں سے کوئی نہیں

vi. Contraction Mapping کی تعریف کیجیے۔

vii. اگر A کسی Banach Space کا Compact Subset ہے تب اس کا Closure $\overline{A}$ بھی Compact ہوگا۔ (صحیح/غلط)

viii. کس Banach Space کے ہر ایک Compact Subset کا Convex Hull ضروری نہیں کہ compact ہو۔ (صحیح/غلط)

ix. اگر X ایک normal space ہے جہاں پر $f(w)=0$ ، $f\in X^*$ تب

(a) $w=3$ (b) $w=2$ (c) $w=1$ (d) $w=0$

x. Partially Ordered Set کی تعریف کیجیے۔

حصہ دوم

-2 ثابت کیجیے کہ ہرایک normed space میٹرک اسپیس ہوتا ہے۔مثال دے کر سمجھائیے کہ اس کا Converse صحیح نہیں ہے۔

-3 فرض کیجیے کہ $A=(a_{ij})$ ایک matrix mxn ہے تب مساوات

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_i , i=1,2,3,......,m$$

سے ایک operator $T:R^n\to R^m$ لکھا جاسکتا ہے جبکہ $T_x=Y$

اور $y=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_m)\in\Re^m$, $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in\Re^n$ ۔ ثابت کیجیے کہ T

(i) لینیر (Linear) ہے

(ii) Uniformly Continuous ہے اور اس لیے Continuous بھی ہے اگر $A\neq 0$ ۔

-4 ثابت کیجیے کہ ہرایک innerproductspace نورم $\|x\|=|<x,x>|^{1/2},\forall x\in X$ کے ساتھ normed space ہوتا ہے۔

-5 فرض کیجیے کہ T کسی Hilbert Space X پر bounded linerar operator ہے تب $T=0$ ہوگا اگر

$$\forall x\in X,\ <Tx,x>=0$$

-6 اگر X ایک Banach Space ہے اور $T:X\to X$ کچھ اس طرح ہے کہ کسی $r\in Z$ ، $r>0$ کے لیے T^r ایک Contraction ہے تب T ایک unique fixed point رکھتا ہے۔

-7 فرض کیجیے کہ ریل ویلیوڈ فنکشن

$F(t,x):K=I\times B\xrightarrow{\text{into}}R^n$ ، جہاں پر

$$x:I[\lambda,\lambda+a]\subset\Re\to\Re^n$$

$$x(\lambda)=\bar{x},$$

$$B=\{x(t)\in R^n:\|x(t)-\bar{x}\|\le b\}$$

مسلسل (Continuous) ہے اور Lispchitz condition کو مطمئن کرتا ہے

$$\|F(t,x)-F(t,y)\|\le K_1\|x-y\| t\in I,x,y\in B$$

فرض کیجیے کہ

$$\|F(t,x)\|\le M,\forall(t,x)\in K$$

اور $$C=Min\left[\frac{b}{M},a,\frac{1-\in}{K_1}\right],\in>0$$

تب ثابت کیجیے کہ کسی $t\in[\lambda,\lambda+c]$ کے لیے انٹگرال مساوات $x(t)=\bar{x}+\int_{\lambda}^{t}F(s,x(s))\,ds$ کا unique حل ہوگا۔

-8 فرض کیجیے کہ dual space X* اگر separable ہے تب normed space X بھی Separable ہوگا۔

-9 ثابت کیجیے کہ ان پولینومیلس کا normed space جن کی نورم $\|x\|=\max_j|\alpha_j|$ ہوں۔ complete نہیں ہے۔

حصہ سوم

10۔ فرض کیجیے کہ X کسی normed space Y کا closed subspace ہے تب ثابت کیجیے کہ فیکٹر اسپیس Y/X بھی نورم $\|y+x\| = \inf\{\|y+x\| : x \in X\}$ کے ساتھ normed space ہے۔

11۔ فرض کیجیے کہ X ایک Hilbert Space ہے اور $T : X \to X$ ایک bounded linear operator ہے تب اس کا adjoint operator T^* مندرجہ ذیل کو مطمئن کرتا ہے۔

(i) $I^* = I$، جہاں پر I، identity operator ہے۔

(ii) $(T+S)^* = T^* + S^*$

(iii) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}\, T^*$

(iv) $(TS)^* = S^* T^*$

(v) $T^{**} = T$

12۔ فرض کیجیے کہ X ایک Banach Space ہے تب ہر ایک contraction mapping $T : X \xrightarrow{\text{into}} X$ ایک unique fixed point رکھتی ہے۔

13۔ فرض کیجیے کہ X ایک Banach Space ہے اور (T_n) ایک باؤنڈڈ لینیر آپریٹرس $T_n : X \xrightarrow{\text{into}} Y$ کی sequence ہے جہاں پر $(\|T_n(x)\|)$ تمام $x \in X$ کے لیے باؤنڈیڈ ہے۔

$\|T_n(x)\| \le c_x, c_x \in \Re, n = 1,2,...$ تب نورمس $\|T_n\|$ کی sequence بھی bounded ہوگی۔

$$\|T_n\| \le c,\ n = 1,2,...$$

14۔ (i) فرض کیجیے کہ X ایک inner product space ہے۔ ثابت کیجیے کہ

$$|<x,y>|^2 \le <x,x><y,y>, \forall x,y \in X$$

(ii) فرض کیجیے کہ $(X_1,\|\cdot\|_1),(X_2,\|\cdot\|_2),...,(X_n,\|\cdot\|_n)$ n-normed space ہیں تب $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ بھی نورم $\|x\| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2 + ... + \|x_n\|_n, x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X$ کے تحت ایک normed space ہوگا۔

☆☆☆